

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ALESSANDRO BOTTI BENEVIDES

**PROPOSTA DE UM MODELO DE FONTES CEREBRAIS
PARA CLASSIFICAÇÃO DE PADRÕES MENTAIS**

VITÓRIA
2009

ALESSANDRO BOTTI BENEVIDES

**PROPOSTA DE UM MODELO DE FONTES CEREBRAIS PARA
CLASSIFICAÇÃO DE PADRÕES MENTAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Teodiano Freire Bastos Filho.

Co-orientador: Prof. Dr. Mário Sarcinelli Filho.

VITÓRIA
2009

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

B465p Benevides, Alessandro Botti, 1982-
Proposta de um modelo de fontes cerebrais para classificação de padrões mentais / Alessandro Botti Benevides. – 2009.
222 f. : il.

Orientador: Teodiano Freire Bastos Filho.

Co-Orientador: Mário Sarcinelli Filho.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Classificação de padrões mentais. 2. Eletroencefalografia. 3. Redes neurais (Computação). 4. Fourier, Transformações de. I. Bastos Filho, Teodiano Freire. II. Sarcinelli Filho, Mário. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. III. Título.

CDU: 621.3

ALESSANDRO BOTTI BENEVIDES

**PROPOSTA DE UM MODELO DE FONTES CEREBRAIS PARA
CLASSIFICAÇÃO DE PADRÕES MENTAIS**

Dissertação submetida ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 13 de março de 2009.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Teodiano Freire Bastos Filho - Orientador
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Mário Sarcinelli Filho - Co-orientador
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Evandro Ottoni Teatini Salles
Universidade Federal do Espírito Santo

Profa. Dra. Aura Conci
Universidade Federal Fluminense

*“Um homem que não se inclina a coisa alguma
jamais pode suportar a carga de si mesmo.”*

(Fiódor Dostoiévski, 1821-1881)

*“Todo prazer e toda dor, e todas as ilusões e enganos
não existem em parte alguma senão na sua mente.”*

(Tsele Natsor Rangdrol, sec. XVII)

a meus pais, que me ensinaram o valor do trabalho;
a meu irmão pelo auxílio incondicional;
a minha namorada, Fabiana, pelo carinho e paciência;
e aos mestres que encontrei durante o curso. Mestres que
convivi e mestres que transformaram minha visão através
do legado de seus textos.

Agradecimentos

Essa pesquisa foi desenvolvida no Laboratório de Automação Inteligente da Universidade Federal do Espírito Santo, sob a supervisão dos orientadores Teodiano e Mário Sarcinelli. Agradeço ao professor Teodiano, que também me orientou durante o projeto de graduação e dois anos de iniciação científica, por possibilitar meu ingresso em seu grupo de pesquisa sobre o controle de uma cadeira de rodas robotizada através de Interfaces Cérebro-Computador. E agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro concedido, sem o qual esta pesquisa não teria sido possível.

Resumo

Nessa pesquisa, estudamos a anatomia cerebral para o entendimento dos padrões de sincronização/dessincronização relacionada a eventos que ocorrem no córtex motor primário durante a realização de tarefas mentais. Nesse intuito, foram estudados os padrões oscilatórios dos circuitos neuronais do sistema tálamo-cortical e o circuito da alça motora. Então, sugerimos um modelo baseado em dipolos elétricos para modelar as fontes cerebrais, e calculamos atenuação do campo elétrico. A partir do modelo, formamos um sistema de equações lineares para separar os sinais de EEG linearmente misturados no encéfalo. Esse método foi testado em classificadores baseados em regras, classificadores estatísticos (Análise por Discriminante Quadrático, Análise por Discriminante Linear e Análise por Discriminante Regularizado) e redes neurais artificiais durante a classificação de 3 tarefas mentais, relacionadas à imaginação de movimento das mãos direita/esquerda e a geração de palavras começando com uma mesma letra qualquer.

Palavras-chaves: EEG, Classificação de Padrões Mentais, Fontes Cerebrais, Classificadores Baseados em Regras, Análise por Discriminante Regularizado, Redes Neurais Artificiais, Transformada de Fourier.

Abstract

In this research, we studied the brain anatomy to understand the patterns of synchronization and des-synchronization related to events occurring in primary motor cortex during the performance of mental tasks. To that end, we studied the oscillatory patterns of neural circuits in the thalamo-cortical system and the motor loop circuit. So, we suggest a model based on electric dipoles to model the brain sources and we calculate the electric field attenuation. From the model, we form a system of linear equations to separate the linearly mixed EEG signals in the brain. We tested this method in rule-based classifiers, statistical classifiers (Quadratic Discriminant Analysis, Linear Discriminant Analysis and Regularized Discriminant Analysis) and Artificial Neural Networks during the classification of 3 mental tasks, related by right/left hand movement intention, and generation of words beginning with the same random letter.

Keywords: EEG, Mental Pattern Classification, Brain Sources, Rule-based Classifiers, Regularized Discriminant Analysis, Artificial Neural Network, Short Time Fourier Transform.

Sumário

Capítulo 1 : Introdução	1
1.1 Estrutura da dissertação	2
Capítulo 2 : Morfologia do Cérebro Humano	4
2.1 Planos de corte e pontos de referência do encéfalo humano	5
2.2 Encéfalo	7
2.3 Cérebro	8
2.4 Tálamo	10
2.5 Córtex motor primário, área motora suplementar e a área pré-motora	13
2.6 Área de Broca e área de Wernicke	15
2.7 Medula espinhal.....	16
2.8 Tracto piramidal.....	17
2.9 Córtex cerebral humano	18
2.9.1 Células gliais.....	19
2.9.2 Células nervosas.....	20
2.10 Impulso nervoso.....	22
2.11 Atividade oscilatória.....	25
2.11.1 Circuitos neuronais	25
2.11.2 Circuitos neuronais oscilatórios	26
2.12 Atividade oscilatória e modulatória do sistema tálamo-cortical.....	27
2.13 Circuitos neuronais dos núcleos da base	30
2.14 A alça motora	32
Capítulo 3 : Transformada de Fourier e o sinal Eletroencefalográfico	35
3.1 Aplicação da Transformada de Fourier no sinal de EEG	35
3.2 Transformada de Fourier em janelas	37
3.3 Sinal Eletroencefalográfico	39
3.4 Posicionamento dos eletrodos	40
3.5 Fisiologia do sinal eletroencefalográfico.....	42
3.6 Artefatos	45
3.7 Oscilações tálamo-corticais	47
3.8 Registros de EEG.....	50
3.9 ERD/ERS.....	52
3.10 Características do ERD/ERS durante um MRP.....	55
Capítulo 4 : Técnicas de Pré-processamento	61
4.1 Filtragem	61
4.2 CAR	62
4.3 Separação Linear de Fontes	63

4.3.1 Campo elétrico das fontes corticais	64
4.3.2 Atenuação do campo elétrico	69
4.3.3 Sistema de equações lineares	71
Capítulo 5 : Classificadores	73
5.1 Classificador baseado em regras	73
5.2 Classificadores Bayesianos	73
5.2.1 Classificadores normais	75
5.2.2 Análise por discriminante quadrático	78
5.2.3 Análise por discriminante linear	79
5.2.4 Análise por discriminante regularizado	81
5.2.5 Considerações sobre a estacionariedade do sinal de EEG	85
5.3 Redes Neurais Artificiais	86
5.3.1 Modelagem matemática	88
5.3.2 Funções de Ativação	89
5.3.3 Topologias	90
5.3.4 Aprendizagem	91
5.3.5 Rede Perceptron multicamadas	91
5.3.6 Algoritmo de aprendizagem backpropagation	92
5.3.7 Otimização da generalização	93
5.3.8 Regularização	94
5.3.9 Regularização automática	94
Capítulo 6 : Materiais e Métodos	96
6.1 Banco de dados	96
6.2 ERD no banco de dados	97
6.3 Aplicação da SLF no banco de dados	101
6.4 Características do sinal de EEG utilizadas para classificação das tarefas mentais	104
6.5 Classificador baseado em regras de decisão	108
6.6 Classificação utilizando QDA	110
6.7 Classificação utilizando LDA	113
6.8 Classificação utilizando RDA	114
6.9 Classificação utilizando RNA	115
6.10 Resultados	116
6.11 Análise dos resultados	119
6.12 Resultados utilizando janelas de 10 s	122
6.13 Análise dos resultados utilizando janelas de 10 s	125
Capítulo 7 : Conclusão	128

7.1 Trabalhos futuros	128
Referências	131
Apêndice A: Conceitos de Biologia	135
A.1 Camadas do córtex somatossensorial.....	135
A.2 Potencial de repouso	135
A.3 Potencial de ação.....	138
A.4 Potencial de limiar	139
A.5 A condução do potencial de ação.....	141
A.6 Liberação de neurotransmissores	143
A.7 Integração Sináptica	146
A.8 Sistema nervoso vegetativo	148
A.9 Características do olho humano	149
A.10 Processamento da visão	152
Apêndice B: Conceitos de Cálculo	155
B.1 Seqüências numéricas.....	155
B.2 Séries numéricas	155
B.3 Séries de potências	156
B.4 Representação de funções em séries de potências.....	157
B.5 Série trigonométrica de Fourier	159
B.6 Série exponencial de Fourier	163
B.7 Transformada de Fourier	165
Apêndice C: Conceitos de Estatística.....	168
C.1 Regularidade estatística, frequência relativa e probabilidade	168
C.2 Histograma	169
C.3 Probabilidade conjunta	170
C.4 Probabilidade condicional	170
C.5 Probabilidade total	171
C.6 Regra de Bayes.....	171
C.7 Eventos independentes	172
C.8 Variável aleatória contínua.....	172
C.9 Distribuição cumulativa	173
C.10 Função densidade de probabilidade	173
C.11 Valor esperado	174
C.12 Funções geradoras	174
C.13 Função característica.....	177
C.14 Distribuições estatísticas	179
C.15 Teorema central do limite	182

C.16 Variáveis aleatórias múltiplas	182
C.17 Distribuições conjuntas	182
C.18 Funções de variáveis aleatórias	183
C.19 Correlação e covariância de funções de duas variáveis aleatórias.....	183
C.20 Gaussiana conjunta de variáveis aleatórias n-dimensionais.....	184
C.21 Processos estocásticos	185
C.22 Distribuição das amostras	186
C.23 Momentos de um processo estocástico	186
C.24 Processo estocástico gaussiano.....	187
C.25 Processo estocástico estacionário.....	188
C.26 Processo estocástico estacionário no sentido amplo	189
C.27 Intervalos de confiança	190
C.28 Intervalos de confiança de uma proporção	191
C.29 Coerência entre dois sinais.....	191
Apêndice D: Conceitos de Álgebra	193
D.1 Teorema 1	193
D.2 Teorema 2	193
D.3 Teorema 3	194
D.4 Teorema 4	194
D.5 Decomposição em valores singulares	195

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 -Relação de frequências ocorridas no cérebro humano (Cheeín, 2005)	48
Tabela 6.1 – Matriz de confusão do classificador baseado em regras (SLF-2).....	120
Tabela 6.2 – Matriz de confusão da melhor RNA (SLF-2).	121
Tabela 6.3 – Matriz de confusão do melhor classificador baseado em regras (SLF-2)	126
Tabela 6.4 – Matriz de confusão dos classificadores QDA/RDA-1/RDA-2(SLF-1)...	126
Tabela 6.5 – Matriz de confusão da melhor RNA(SLF-2)	127

Lista de Figuras

Figura 2.1– Sistema nervoso humano (adaptado de Silva & Sasson, 2009).	5
Figura 2.2 – Esquerda: Planos anatômicos de corte do encéfalo (adaptado de Cheeín, 2005); Direita: Ossos do Crânio.	6
Figura 2.3 – Esquerda: Seleção de giros sulcos e fissuras; Direita: Localização dos quatro lobos cerebrais (Bear, et al., 2008).	7
Figura 2.4 – Principais zonas do encéfalo (adaptado de Silva & Sasson, 2009).	7
Figura 2.5 - Camadas de revestimento cerebral (adaptado de Balestro, 2009).	8
Figura 2.6 – Esquerda: Substância branca e substância cinzenta (adaptado de Bear, et al., 2008); Direita: Mapa citoarquitetônico de Brodmann (Bear, et al., 2008).	9
Figura 2.7 – Principais áreas corticais (adaptado de Bear, et al., 2008).	10
Figura 2.8 – Representação esquemática dos principais núcleos do tálamo.	11
Figura 2.9 – Mapa somatotópico do giro pré-central humano (Bear, et al., 2008).	14
Figura 2.10 – Mapa somatotópico do giro pós-central humano (Bear, et al., 2008).	14
Figura 2.11 – Localização da área de Broca e área de Wernicke (Bear, et al., 2008).	16
Figura 2.12 – Esquerda: Nervos espinhais e raízes nervosas espinhais (Bear, et al., 2008); Direita: Sistema piramidal.	17
Figura 2.13 – Camadas do córtex cerebral (Machado, 2007).	19
Figura 2.14 – Células do tecido cerebral (neurônios, astrócitos e oligodendrócitos).	20
Figura 2.15 – Esquerda: Morfologia básica de um neurônio (Vilela, 2009). Direita: Principais tipos de neurônios (HowStuffWorks, 2009).	21
Figura 2.16 – Esquerda: Junção entre um neurônio pré-sináptico e um neurônio pós-sináptico (Bear, et al., 2008). Direita: Eventos eletroquímicos da sinapse excitatória e inibitória (adaptado de (Guyton & Hall, 2006).	24
Figura 2.17 – Circuito neuronal excitatório-inibitório (adaptado de (Guyton & Hall, 2006).	26
Figura 2.18 – Oscilador de dois neurônios (adaptado de Bear, et al., 2008).	26
Figura 2.19 – Circuitos neuronais oscilatórios (adaptado de Guyton & Hall, 2006).	27
Figura 2.20 – Ritmos do tálamo comandam os ritmos no córtex cerebral (adaptado de Bear, et al., 2008).	29
Figura 2.21 – Mecanismo da inibição lateral (adaptado de Bear, et al., 2008).	30
Figura 2.22 – Relações anatômicas entre os núcleos da base, o córtex cerebral e o tálamo (adaptado de Guyton & Hall, 2006).	31
Figura 2.23 – Núcleos da base e estruturas associadas (Bear, et al., 2008).	32
Figura 2.24 - Circuitos neuronais da alça motora. Sinapses marcadas com sinal (+) são excitatórias, enquanto sinapses marcadas com sinal (-) são inibitórias (Bear, et al., 2008).	32
Figura 3.1 – Sinal de EEG.	35
Figura 3.2 – Superior: Sinal de EEG; Inferior: Espectro de frequência do sinal de EEG (Informações sobre a origem desse sinal de EEG estão no capítulo 6, na descrição do banco de dados de EEG utilizado).	36
Figura 3.3 – Superior: Sinal de EEG filtrado entre 10-12 Hz; Inferior: Espectro de frequência do sinal de EEG filtrado.	36
Figura 3.4 – Aplicação da transformada Garbor.	37
Figura 3.5 – Espectros de amplitude do sinal de EEG filtrado.	38
Figura 3.6 – Espectros de amplitude sobrepostos.	38
Figura 3.7 – Esquerda: Espectro de amplitude; Direita: Espectro de amplitude do sinal filtrado entre 10 e 12 Hz.	39
Figura 3.8 - Registro típico de EEG (adaptado de (Bear, et al., 2008).	40

Figura 3.9 – Sistema Internacional de Posicionamento de Eletrodos 10-20 (Sala, 2005).	41
Figura 3.10 – Sistema Internacional de Posicionamento de Eletrodos 10-20. (a) Visão temporal. (b) Visão frontal. (c) visão parietal (Sala, 2005).	41
Figura 3.11 – (a) Método bipolar de ligação de eletrodos. (b) Método unipolar de ligação de eletrodos. (c) Referencia média comum (Sala, 2005).	42
Figura 3.12 – Correntes sinápticas extracelulares (Lopes, 2005).	42
Figura 3.13 – Atenuação do campo elétrico gerado por correntes sinápticas extracelulares de células piramidais (Bear, et al., 2008).	44
Figura 3.14 – (a) Neurônios piramidais da camada V do córtex cerebral. (b) Atividade neuronal dessincronizada (c) Atividade neuronal sincronizada (Bear, et al., 2008).	44
Figura 3.15 – Sinal de EEG com interferência de linha (Informações sobre a origem desse sinal de EEG estão no capítulo 6, na descrição do banco de dados de EEG utilizado).	45
Figura 3.16 – Artefatos de piscadas de olho em um EEG normal (Bear, et al., 2008).	46
Figura 3.17 – Abrangência do espectro de frequências do EEG (adaptado de Scholarpedia, 2009).	47
Figura 3.18 – Ritmos cerebrais α , β , θ e δ . Em baixo é mostrada a substituição do ritmo α por um ritmo β (adaptado de Guyton & Hall, 2006).	49
Figura 3.19 – Detecção do ERP através da média das gravações de EEG (adaptado de Rugg & Coles, 1996).	50
Figura 3.20 – Potencial evocado somatosensitivo normal (adaptado de Delamónica, 1984).	51
Figura 3.21 – ERD/ERS no sinal de EEG capturado no lobo occipital (adaptado de Cheeín, 2005).	53
Figura 3.22 – Caminho percorrido pela informação visual até o córtex visual.	53
Figura 3.23 – Circuito tálamo-cortical para o processamento de informação visual (adaptado de Scholarpedia, 2009).	54
Figura 3.24 – Potencial DC dos eletrodos C3 e C4 (adaptado de Beisteiner, et al., 1995).	57
Figura 3.25 – Procedimento para medir ERD/ERS (adaptado de Pfurtscheller & Lopes, 1999).	58
Figura 3.26 – Fluxo de ativação e desativação: a) fase de programação; b) fase de execução; c) fase de restabelecimento (Bianchi, et al., 1995).	60
Figura 4.1 – (A) EEG e EMG; (B) Espectro de amplitude do EEG e do EMG; (C) Coerência entre o EEG e o EMG, a linha fraca horizontal representa o intervalo de confiança de 95% (vide apêndice c, sessão C.27) (Grosse, 2004); (D) Localização do músculo deltóide.	62
Figura 4.2 – Disposição das fontes corticais e eletrodos.	63
Figura 4.3 – Esquerda: Distribuição bipolar do neurônio piramidal (adaptado de Luck, 2005); Direita: Orientação do campo eletromagnético no córtex (adaptado de Luck, 2005).	64
Figura 4.4 – Modelagem do encéfalo humano (adaptado de Cuffin, 1995).	65
Figura 4.5 – Esquerda: Ossos e suturas cranianas; Centro: Camadas do crânio e sutura; Direita: (A) Osso padrão de três camadas (B) Osso de quase-três camadas (C) Osso padrão compacto (D) Osso quase-compacto (E) Sutura craniana denteada (F) Sutura craniana escamosa (adaptado de Tang et al., 2008).	65
Figura 4.6 – Histograma da resistividade (esquerda) e espessura (direita) de diferentes estruturas ósseas cranianas (Tang et al., 2008).	66
Figura 4.7 – Disposição simplificada das fontes corticais e eletrodos.	67

Figura 4.8 – Disposição simplificada das fontes cerebrais e eletrodos.	67
Figura 4.9 – Dipolo elétrico.....	68
Figura 4.10 – Atenuação do potencial elétrico de um dipolo elétrico sobre o eixo x	69
Figura 4.11 – Variação fictícia da permissividade elétrica no interior do encéfalo.	70
Figura 5.1 – Esquerda: Distribuição normal univariada; Direita: Distâncias de Mahalanobis de uma distribuição normal bivariada (Duda, et al., 2001).....	78
Figura 5.2 – Regiões de decisão não lineares (Duda, et al., 2001).....	79
Figura 5.3 – Região de decisão linear para normais com matrizes de variância iguais e arbitrárias (Duda, et al., 2001).....	80
Figura 5.4 - Modelagem matemática de um neurônio artificial (Lopes, 2005).....	88
Figura 5.5 – (a) Função de ativação de limiar; (b) Função de ativação linear; (c) Função de ativação sigmóide; (d) Função de ativação tangente sigmóide (Demuth & Beale, 2000).....	90
Figura 5.6 – RNA recorrente com três camadas (adaptado de Demuth & Beale, 2000).90	
Figura 5.7 – Arquitetura de RNAs com aprendizado supervisionado.....	91
Figura 6.1 – Sinais de EEG das três primeiras sessões do indivíduo 3, canal C3.	97
Figura 6.2 –ERD do indivíduo 3 calculado utilizando o método clássico para a imaginação de movimento da mão esquerda (Classe 2) e direita (Classe 3). Esquerda: ERD em função do tempo para o eletrodo C3; Centro: ERD em função do tempo para o eletrodo C4; Direita: ERD médio dos canais C3 e C4 durante a janela de 20 segundos.	99
Figura 6.3 – ERD do indivíduo 3 utilizando o método IV para a imaginação de movimento da mão esquerda (Classe 2) e direita (Classe 3). Esquerda: ERD em função do tempo para o eletrodo C3; Centro: ERD em função do tempo para o eletrodo C4; Direita: ERD médio dos canais C3 e C4 durante a janela de 20 segundos.	100
Figura 6.4 – Esquerda: Disposição dos 32 eletrodos sob o escalpo; Direita: Mapeamento dos eletrodos em um plano euclidiano.	102
Figura 6.5 – Gráfico superior: Sinal de EEG obtido no canal C3; Gráfico inferior: O mesmo Sinal de EEG, porém processado pelo método de separação linear de fontes.	103
Figura 6.6 – Janela de tempo abrangendo a tarefa mental de geração de palavras e imaginação de movimento da mão direita.	105
Figura 6.7 – (a) espectro de amplitude do canal C3; (b) espectro de amplitude do canal C3 filtrado na banda μ ; (c) espectro de amplitude do canal C3 processado por SLF; (d) espectro de amplitude do canal C3 processado por SLF e filtrado na banda μ	106
Figura 6.8 – Janela de tempo abrangendo a tarefa mental de geração de palavras e imaginação de movimento da mão esquerda.	106
Figura 6.9 – (a) espectro de amplitude do canal C4; (b) espectro de amplitude do canal C4 filtrado na banda μ ; (c) espectro de amplitude do canal C4 processado por SLF; (d) espectro de amplitude do canal C4 processado por SLF e filtrado na banda μ	107
Figura 6.10 – Árvore de decisão do classificador baseado em regras.	109
Figura 6.11 – Energia média das janelas da época 1, sinal de EEG do indivíduo 3, canal C3, sessão 1.	113
Figura 6.12 – Taxas de acerto do classificador RDA-1 em função do parâmetro de regularização, λ	117
Figura 6.13 – Taxas de acerto do classificador RDA-2 em função dos parâmetros de regularização, λ e γ	118
Figura 6.14 – Taxas de acerto das RNAs em função do número de neurônios da camada intermediária.	118
Figura 6.15 – Taxas de acerto dos classificadores; Superior: SLF-1; Inferior: SLF-2.	119

Figura 6.16 – Taxas de acerto dos melhores classificadores baseados em regras em função do número de janelas.	122
Figura 6.17 – Taxas de acerto dos melhores classificadores QDA (esquerda) e LDA (direita) em função do número de janelas (as setas indicam os melhores resultados para janelas de até 10s e para janelas de até 15s).	123
Figura 6.18 – Taxas de acerto dos melhores classificadores RDA-1 em função do número de janelas (as setas indicam os melhores resultados para janelas de até 10s e para janelas de até 15s).	123
Figura 6.19 – Taxas de acerto dos melhores classificadores RDA-2 em função do número de janelas (as setas indicam os melhores resultados para janelas de até 10s e para janelas de até 15s).	124
Figura 6.20 – Taxas de acerto das melhores RNAs em função do número de janelas (as setas indicam os melhores resultados para janelas de até 10s e para janelas de até 15s).	124
Figura 6.21 – Taxas de acerto dos classificadores; Parte de cima: SLF-1; Parte de baixo: SLF-2.	125
Figura 7.1 – ERD observado durante a imaginação de movimento das mãos e pés (adaptado de (Pfurtscheller & Lopes da Silva, 1999)).	130
Figura A.1 – Esquerda: Funcionamento da bomba de sódio e potássio; Direita: Distribuição de carga elétrica através da membrana (Bear, et al., 2008).	136
Figura A.2 – Potencial de Ação (Bear, et al., 2008).	138
Figura A.3 – Codificação dos potenciais de ação emitidos pelo neurônio (adaptado de Bear, et al., 2008).	139
Figura A.4 –Esquerda: Potencial de Ação transmitido através do axônio (Vilela, 2009); Direita: Condução saltatória do potencial de ação (Estébanez, 2003).	142
Figura A.5 – Zona de disparo de um neurônio piramidal e um neurônio sensorial (Bear, et al., 2008)	143
Figura A.6 –Geração de um potencial excitatório pós-sináptico (PEPS) (Bear, et al., 2008).	144
Figura A.7 –Geração de um potencial inibitório pós-sináptico (PIPS) (Bear, et al., 2008)	145
Figura A.8 –Ações de neurotransmissores em receptores acoplados a proteínas G. (a) Canais iônicos; (b) Enzimas que geram segundos mensageiros intracelulares (Bear, et al., 2008)	146
Figura A.9 – Somação de PEPSs (Bear, et al., 2008).	147
Figura A.10 – Princípio do “tudo ou nada”.	148
Figura A.11 – Organização laminar da retina humana (adaptado de (Bear et al., 2008)).	150
Figura A.12 – Sensibilidade espectral dos três tipos de pigmentos dos cones (cone azul, cone verde e cone vermelho) (Bear, et al., 2008)	150
Figura A.13 – Ativação da rodopsina pela luz (Bear, et al., 2008)	151
Figura A.14 –Hiperpolarização dos fotorreceptores em resposta à luz (Bear, et al., 2008)	151
Figura A.15 – Via visual que permeia a percepção visual consciente (adaptado de (Bear et al., 2008)).	152
Figura A.16 – Esquerda: Eferências da retina às camadas no NGL (Bear, et al., 2008); Direita: Morfologia dendrítica de algumas células no córtex estriado (Bear, et al., 2008).	153
Figura B.1 – Intervalos de convergência da série de potência.	157

Figura B.2 – Esquerda: Onda quadrada bipolar no domínio do tempo. Direita: Espectro de frequência da onda quadrada bipolar (Carvalho, 2003).....	162
Figura B.3 – Superior: Trem de pulsos retangulares periódicos no domínio do tempo. Inferior: Espectro de frequência e fase do trem de pulsos retangulares (Carvalho, 2003).	165
Figura B.4 – Superior: Pulso retangular não-periódico no domínio do tempo. Inferior: Espectro de frequência do pulso retangular (Carvalho, 2003).	167
Figura C.1 – Histograma relacionando os eventos da Tabela 6.1.	169
Figura C.2 – Partição de S em n conjuntos disjuntos.	171
Figura C.3 – Exemplos de assimetria em funções de densidade de distribuições.....	176
Figura C.4 – Tipos de excesso de curtose de uma distribuição.....	177

Nomenclatura

Símbolos métricos

Símbolo	Descrição	Unidade do SI
b	Distância entre as cargas do dipolo elétrico	m
d	Distância horizontal entre as fontes corticais	m
\vec{E}	Campo Elétrico	N/C
e_i	Sinal eletroencefalográfico do eletrodo i	V
e_μ	Energia do sinal de EEG filtrado na banda μ	V ²
f_i	Sinal eletrocortical da fonte cortical i	V
\vec{p}	Momento do dipolo elétrico	N·m/C
r_μ	Energia do sinal de EEG de referência filtrado na banda μ	V ²
t	Tempo	s
x	Eixo x de um sistema de coordenadas ortogonal	m
y	Eixo y de um sistema de coordenadas ortogonal	m

Unidades

Unidade	Descrição	Nome
Hz	Frequência	Hertz
rad	Medida de ângulo plano	Radiano

Letras Gregas

Símbolo	Descrição	Unidade
$\alpha, \beta, \delta, \theta, \mu$	Bandas de frequências do sinal de EEG	Hz
α	Taxa de aprendizagem	-
δ	Autovalor de Σ_k	-
γ	Taxa de desempenho	-
γ	Parametro adicional de regularização	-
ε	Permissividade elétrica	F/m
θ	Limiar de ativação da função de ativação	-
A_k	Matriz diagonal com os autovalores de Σ_k	-

Letras Gregas (continuação)

Símbolo	Descrição	Unidade
λ	Parametro de regularização	-
μ_k	Média de uma variável aleatória de C_k	U*
$\boldsymbol{\mu}_k$	Vetor com médias de variáveis aleatórias de C_k	-
$\rho_{x_1x_2}$	Coeficiente de correlação das variáveis x_1 e x_2	-
$\boldsymbol{\Sigma}_k$	Matriz de covariância de C_k	-
σ_k	Desvio padrão de uma variável aleatória de C_k	U*
τ	Incremento temporal	s
φ	Função de ativação da rede neural artificial	-
ϕ_k	Matriz com os autovetores de $\boldsymbol{\Sigma}_k$	-
$\boldsymbol{\psi}$	Matriz de características / Função Característica	-

*Unidade da variável observada

Outros símbolos

Símbolo	Descrição	Exemplo
A	Matriz de atenuação	-
a	Coeficientes de atenuação	$a_{i,j}$
b	Polarização do neurônio k da RNA	b_k
C_k	Classe k	-
d	Dimensionalidade das classes	-
E	Vetor com sinais eletroencefalográficos	-
e	Eletrodos	e_i
F	Vetor com sinais eletrocorticais	-
f	Fontes corticais	f_i
$f(\cdot)$	Função algébrica	$f(t)$
g_{Ck}	Função discriminante de C_k	-
k	Constante	-
k	Neurônio	-
L	Número de classes do espaço amostral	-
N_k	Número de amostras de C_k	-
o	Origem de um sistema de coordenadas	o
	Coordenadas do ponto	-

Outros símbolos (continuação)

Símbolo	Descrição	Exemplo
$P(C_k)$	Probabilidade a priori de C_k	-
$P(x/C_k)$	Função densidade de probabilidade de C_k	-
$P(C_k/x)$	Probabilidade a posteriori de C_k	-
S	Espaço amostral	-
\mathbf{v}	Autovetor de Σ_k	-
x	Evento no espaço amostral (variável aleatória)	-
w	Peso da entrada j do neurônio k da RNA	$w_{k,j}$
\mathbf{x}	Vetor de variáveis aleatórias (dimensão d)	-
y	Saída do neurônio k da RNA	y_k

Símbolos sobrepostos

Símbolo	Descrição	Exemplo
T	Transposta	AT
-	Operação de média	$\bar{\mu}$
\wedge	Variável regularizada	$\hat{\Sigma}$
\rightarrow	Notação vetorial	\vec{E}

Símbolos subscritos

Símbolo	Descrição	Exemplo
i, j	Número de identificação ou índices	a_{ij}
j	Entrada j de um neurônio da RNA	x_j
k	Classe	C_k
k	Neurônio	v_k
max	Valor máximo de uma função	$max(g_{Ck})$

Siglas

Símbolo	Descrição
ADP	Difosfato de Adenosina
AMS	Área Motora Suplementar
APM	Área Pré-Motora
AR	<i>Autoregressive Model</i> (Modelo Auto-Regressivo)
ATP	Trifosfato de Adenosina
BSS	<i>Blind Source Separation</i> (Separação Cega de Fontes)
CA	Corrente Alternada
CAR	<i>Common Average Reference</i> (Referência Média Comum)
<i>cdf</i>	<i>Cumulative Distribution Function</i> (Função Distribuição Cumulativa)
CGL	Corpo Geniculado Lateral
DC	<i>Direct Current</i> (Corrente Contínua)
ECoG	Eletrocortigrama
EEG	Eletroencefalograma
ELA	Esclerose Lateral Amiotrófica
EMG	Eletromiograma
EOG	Eletrooculograma
EP	<i>Evoked Potential</i> (Potencial Evocado)
ERD	<i>Event Related Desynchronization</i> (Dessincronização Relacionada a Evento)
ERP	<i>Event-Related Potential</i> (Potencial Relacionado a Eventos)
ERS	<i>Event Related Synchronization</i> (Sincronização Relacionada a Evento)
ESD	<i>Energy Spectral Density</i> (Densidade Espectral de Energia)
GABA	<i>Gamma-Aminobutyric Acid</i> (Ácido Gama-Aminobutírico)
Glu	Glutamato
GMPc	Monofosfato de Guanosina Cíclico
HOS	<i>High Order Statistical Separation</i> (Separação Estatística de Alta Ordem)
IA	Inteligência Artificial
ICA	<i>Independent Component Analysis</i> (Análise de Componentes Independentes)
ICC	Interface Cérebro Computador

Siglas (continuação)

Símbolo	Descrição
<i>IV</i>	<i>Intertrial Variance</i> (Variância do Ensaio)
LCR	Líquido Cefalorraquidiano
<i>LDA</i>	<i>Linear Discriminant Analysis</i> (Análise por Discriminante Linear)
MEG	Magnetoencefalografia
<i>MRP</i>	<i>Movement-Related Potencial</i> (Potencial Relacionado a Movimentos)
<i>MSE</i>	<i>Mean Square Error</i> (Erro Quadrático Médio)
NGL	Núcleo Geniculado Lateral do Tálamo
NGM	Núcleo Geniculado Medial do Tálamo
NP	Não Processado
PA	Potencial de Ação
<i>PDE</i>	<i>Phosphodiesterase</i> (Fosfodiesterase)
PEPS	Potencial Excitatório Pós-Sináptico
<i>pdf</i>	<i>Probability Density Function</i> (Função Densidade de Probabilidade)
PIPS	Potencial Inibitório Pós-Sináptico;
PPS	Potencial Pós-Sináptico;
<i>PSD</i>	<i>Power Spectral Density</i> (Densidade Espectral de Potência)
<i>QDA</i>	<i>Quadratic Discriminant Analysis</i> (Análise por Discriminante Quadrático)
<i>RDA</i>	<i>Regularized Discriminant Analysis</i> (Análise por Discriminante Regularizado)
RNA	Rede Neural Artificial
<i>SFA</i>	<i>Signal Fraction Analysis</i> (Análise por Fração de Sinal)
SLF	Separação Linear de Fontes
SNC	Sistema Nervoso Central
SNP	Sistema Nervoso Periférico
SNV	Sistema Nervoso Vegetativo
<i>SSS</i>	<i>Strict Sense Stationarity</i> (Estacionariedade no Sentido Estrito)
<i>STFT</i>	<i>Short Time Fourier Transform</i> (Transformada de Fourier em Janelas)
<i>SVM</i>	<i>Support Vector Machine</i> (Máquina com Suporte a Vetor)
<i>TCR</i>	<i>Thalamic Relay Cells</i> (Células Talâmicas Relé)
TEP	Tomografia por Emissão de Pósitrons

Siglas (continuação)

Símbolo	Descrição
TF	Transformada de Fourier
<i>TRN</i>	<i>Thalamic Reticular Nucleus</i> (Núcleo Talâmico Reticulado);
VP	Núcleo Ventral Posterior do Tálamo
VPM	Núcleo Ventral Pósterio-Medial do Tálamo
WSS	<i>Wide Sense Stationarity</i> (Estacionariedade no Sentido Amplo)

Capítulo 1 : Introdução

O estudo apresentado nesta dissertação abrange as áreas de Neurociência, processamento de sinais e classificação de padrões. Essas áreas são unidas perante o interesse comum da construção de uma Interface Cérebro-Computador (ICC).

A ICC proposta proporciona a comunicação entre homem e máquina mediante a utilização de sinais eletroencefalográficos (EEG). Os sinais de EEG são gravações de flutuações elétricas resultantes da atividade neuronal. O avanço na tecnologia de captação e processamento de sinais permite que os sinais de EEG capturados de forma não-invasiva, isto é, com os eletrodos posicionados na superfície do escalpo, possam ser utilizados para o controle de dispositivos robóticos.

Pessoas com funcionalidade corporal normal não apresentam dificuldade em se comunicar e controlar máquinas através dos meios usuais. Porém os portadores de deficiências físicas severas, como Esclerose Lateral Amiotrófica¹ (ELA) e tumores na medula espinhal são incapazes de realizar praticamente qualquer atividade motora. Essas pessoas vivem em estado de completo isolamento e o único meio para captar seu desejo é através do monitoramento da atividade cortical.

O objetivo desta dissertação é classificar sinais eletroencefalográficos gerados a partir de diferentes tarefas mentais. As tarefas mentais são realizadas em áreas específicas do córtex² cerebral. Posicionando eletrodos sobre essas áreas, consegue-se captar o sinal elétrico gerado pela população de neurônios responsável pela realização da tarefa mental.

Durante a realização de uma tarefa mental ocorre um padrão no sinal elétrico da população de neurônios envolvida na sua execução, isto é, o EEG de eletrodos especificamente colocados sobre a área cortical contém um padrão que pode ser utilizado para identificar a natureza da tarefa mental realizada.

Porém o sinal de EEG é atenuado pelas diversas camadas de revestimento do cérebro, sofre interferência de sinais biológicos gerados em órgãos, como coração e músculos e também sofre interferência eletromagnética de fontes de corrente alternada (CA). Por fim, o problema mais complexo é a mistura dos sinais elétricos corticais que

¹ Doença em que os neurônios motores da medula espinhal morrem lentamente devido a excitotoxicidade, ou seja, excesso do neurotransmissor glutamato (Bear, et al., 2008).

² Do latim, “casca” (Bear, et al., 2008).

ocorrem em diferentes áreas cerebrais. O sinal elétrico cortical da área estudada é misturado aos sinais elétricos provenientes de áreas corticais vizinhas enquanto se propaga do córtex ao escalpo.

Assim, a mistura de sinais captada pelo eletrodo de superfície obscurece o padrão que se quer observar durante a realização de uma tarefa mental. Dessa forma, a tarefa de observar padrões no EEG de forma a identificar a natureza das tarefas mentais se torna muito complexa e envolve o uso de ferramentas para filtragem e remoção de artefatos, técnicas para desmisturar os sinais de EEG e também técnicas de extração de características dos sinais, para a posterior classificação de padrões.

Nessa dissertação será proposto um modelo para a interação entre as fontes de sinal cerebral, baseado no modelo de dipolos elétricos. A partir desse modelo pode-se calcular a atenuação sofrida pelo campo elétrico das fontes cerebrais e, então, formar um sistema de equações lineares capaz de desmisturar os sinais elétricos das fontes cerebrais linearmente misturadas no encéfalo. A técnica para desmisturar os sinais elétricos corticais emergente desse modelo é chamada Separação Linear de Fontes, e será analisada em conjunto com diversos classificadores, indicando o classificador que obteve maior taxa de acerto (Benevides et al., 2008).

O caso especificamente estudado nesta dissertação de mestrado compreende o reconhecimento de padrões de três tarefas mentais que são respectivamente a intenção de movimento das mãos direita ou esquerda e a geração de palavras que comecem com uma mesma letra aleatória. Para esse fim analisou-se um banco de dados internacional que contém gravações de EEG referentes a essas tarefas mentais e foram utilizados diversos tipos de classificadores de padrões.

Em resumo, o objetivo dessa pesquisa é propor um modelo para a interação das fontes cerebrais que associado a um classificador, pode ser capaz de identificar diferentes tarefas mentais e, portanto, ser aplicado a uma interface cérebro computador.

1.1 Estrutura da dissertação

Para compreendermos melhor os capítulos seguintes, descreveremos o cérebro humano no capítulo 2, a transformada de Fourier e o sinal eletroencefalográfico no capítulo 3. O interesse pela formação do sinal de EEG possibilita o entendimento dos padrões gerados durante a intenção de movimento e a forma como os sinais são misturados. Apesar do sinal de EEG não apresentar padrões com características

visualmente perceptíveis no domínio temporal, eles podem ser observados através de uma análise espectral sobre a média de vários sinais de EEG.

No capítulo 4 são discutidas técnicas para o pré-processamento do sinal. Nesse capítulo são abordadas técnicas de filtragem, utilizadas para minimizar o ruído e sugere-se um método, que chamamos de Separação Linear de Fontes para desmisturar os sinais de EEG. Dessa forma, os padrões apresentados no sinal de EEG podem ser observados através de uma análise espectral sobre uma única gravação de EEG.

O capítulo 5 aborda os classificadores utilizados para identificar as tarefas mentais, que pertencem a 3 grupos: classificadores baseado em regras de indução, classificadores probabilísticos (Análise por Discriminante Linear, Análise por Discriminante Quadrático e Análise por Discriminante Linear Regularizado) e classificadores com aprendizado (redes neurais artificiais).

A descrição dos experimentos e resultados obtidos é discutida no capítulo 6, e o capítulo 7 apresenta a conclusão e sugestões para projetos futuros. São apresentados ao final da dissertação quatro apêndices que complementam o estudo realizado nos capítulos teóricos. O apêndice A apresenta conceitos de biologia complementares aos conceitos estudados nos capítulos 2 e 3. O apêndice B apresenta conceitos de cálculo necessários à introdução da transformada de Fourier utilizada no capítulo 3. O apêndice C apresenta conceitos de estatística necessários para a compreensão dos classificadores estudados no capítulo 5. O apêndice D apresenta alguns conceitos de álgebra utilizados durante o capítulo 5.

Capítulo 2 : Morfologia do Cérebro Humano

O Intuito do presente capítulo é descrever o cérebro humano anatomicamente de forma a relacionar as áreas cerebrais responsáveis pelas tarefas mentais com a localização dos eletrodos. Uma análise mais profunda, descrevendo as camadas corticais, as células cerebrais e os potenciais pós-sinápticos são necessários para o entendimento da origem do sinal eletroencefalográfico e os padrões que apresentam.

O sistema nervoso coordena e monitora toda atividade consciente e inconsciente do organismo. É composto pelo sistema nervoso central (SNC) e o sistema nervoso periférico (SNP) (Figura 2.1). O SNC consiste do encéfalo e da medula espinhal. O SNP consiste de nervos³ e gânglios⁴. O SNP é formado pelo sistema nervoso somático e sistema nervoso vegetativo⁵ (SNV) (Bear, et al., 2008).

O sistema nervoso somático é o responsável pela coordenação dos movimentos do corpo e também por receber estímulos externos. Este é o sistema que regula as atividades que estão sob controle consciente. O sistema nervoso vegetativo é dividido em sistema nervoso simpático, sistema nervoso parassimpático e sistema nervoso entérico. O sistema nervoso simpático responde ao perigo iminente ou stress, e é responsável pelo incremento do batimento cardíaco e da pressão arterial. O sistema nervoso parassimpático é responsável pela constrição pupilar, redução dos batimentos cardíacos, dilatação dos vasos sanguíneos e a estimulação dos sistemas digestivo e genitourinário. O papel do sistema nervoso entérico é gerenciar todos os aspectos da digestão, do esôfago ao estômago, intestino delgado e cólon. Nas próximas sessões nos concentraremos no SNC e seu principal constituinte, o encéfalo (Silva & Sasson, 2009).

³ Agrupamentos de axônios no SNP. Somente um grupo de axônios no SNC, o nervo óptico, é nomeado como nervo (Bear, et al., 2008).

⁴ Do grego “nó”. Aglomerado de corpos celulares de neurônios encontrados fora do SNC (Bear, et al., 2008).

⁵ Indeadidamente chamado de sistema nervoso autônomo (SNA), pois sua autonomia é limitada. O SNV se comunica com o SNC através da medula espinhal e nervos cranianos, recebendo sinais de controle de neurônios da medula e do tronco encefálico (Bear, et al., 2008).

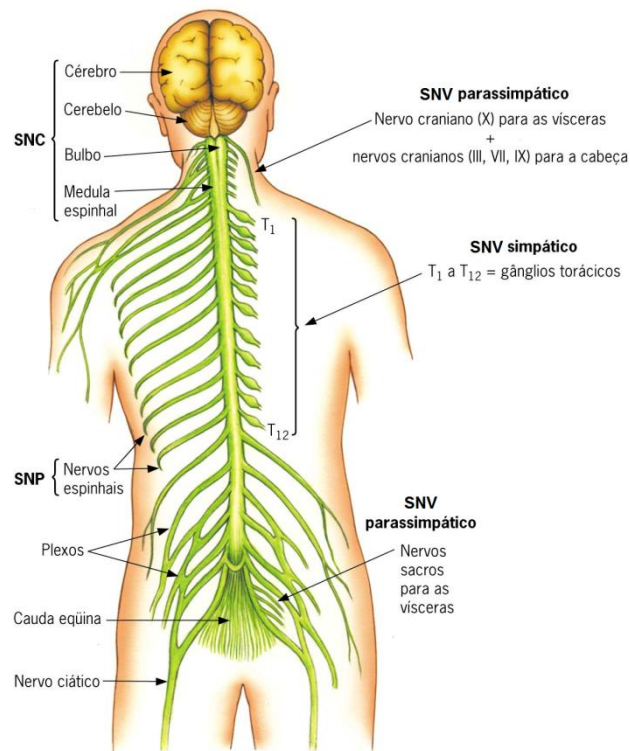


Figura 2.1– Sistema nervoso humano (adaptado de Silva & Sasson, 2009).

2.1 Planos de corte e pontos de referência do encéfalo humano

Para se localizar as áreas do encéfalo são utilizados planos com pontos de referência. A parte do encéfalo direcionada para frente do corpo humano é chamada anterior, a parte direcionada para as costas do corpo humano é chamada posterior, a direção orientada para cima é chamada dorsal e a direção orientada para baixo é chamada ventral. A linha imaginária que atravessa ao meio o sistema nervoso é chamada linha média e nos dá outra forma para descrever a direção. Estruturas mais próximas à linha média são mediais, estruturas mais afastadas da linha média são laterais. Além disso, duas estruturas que estão no mesmo lado são ipsilaterais uma da outra, e estruturas que estão em lados opostos da linha média são contralaterais uma da outra (Bear, et al., 2008).

Para visualizar a estrutura interna do encéfalo é necessário cortá-lo, em que uma fatia é chamada secção. A maneira padrão é realizar os cortes paralelos em um dos três planos anatômicos de secção. O plano de secção que resulta da divisão do encéfalo em metades direita e esquerda iguais chama-se plano mediano. Cortes paralelos ao plano mediano estão no plano sagital. Os outros dois planos são o plano horizontal, que divide

o encéfalo em partes dorsal e ventral e o plano coronal que divide o encéfalo em partes anterior e posterior (Figura 2.2 - Esquerda).

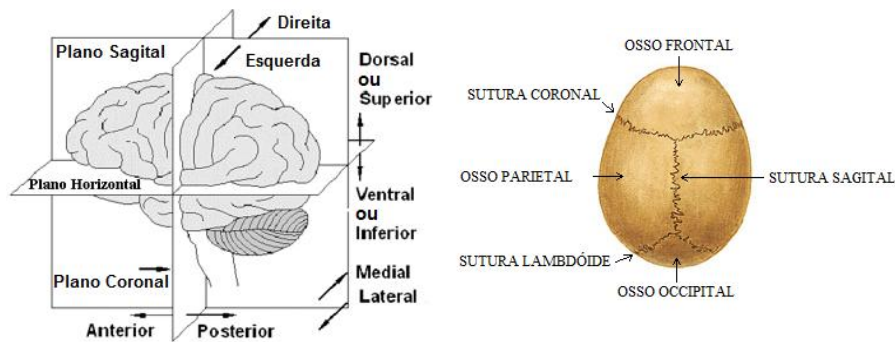


Figura 2.2 – Esquerda: Planos anatômicos de corte do encéfalo (adaptado de Cheeín, 2005); Direita: Ossos do Crânio.

Por convenção o cérebro é subdividido em lobos, nomeados em relação aos ossos do crânio que estão acima deles (Figura 2.2 - Direita). A superfície cerebral é composta por inúmeras circunvoluções. As circunvoluções são o resultado evolutivo da tentativa do encéfalo em aumentar sua área cortical estando confinado no crânio. As saliências chamam-se giros e as reentrâncias chamam-se sulcos; sulcos muito profundos são denominados fissuras. O padrão exato dos giros e sulcos pode variar consideravelmente de indivíduo para indivíduo, mas muitas características são comuns a todos os encéfalos humanos. Alguns limites importantes são indicados na Figura 2.3 (Esquerda). A profunda fissura sagital divide os hemisférios cerebrais esquerdo e direito. O giro pós-central está situado imediatamente posterior ao sulco central e ao giro pré-central. O sulco central divide o lobo frontal do lobo parietal. A profunda fissura lateral (de Sylvius) divide o lobo frontal do lobo temporal. O lobo occipital localiza-se na região caudal do cérebro, é circundado pelos lobos parietal e temporal (Figura 2.3 - Direita) (Bear, et al., 2008).

O lobo temporal recebe e processa informação auditiva e está relacionado à identificação e nomeação de objetos. O lobo frontal, que inclui o córtex motor e pré-motor e o córtex pré-frontal, está envolvido no planejamento de ações e movimento, assim como no pensamento abstrato. O lobo parietal é o córtex somatossensorial primário e recebe informações do tálamo sobre toque e pressão. O lobo occipital recebe e processa informação visual (Guyton & Hall, 2006).

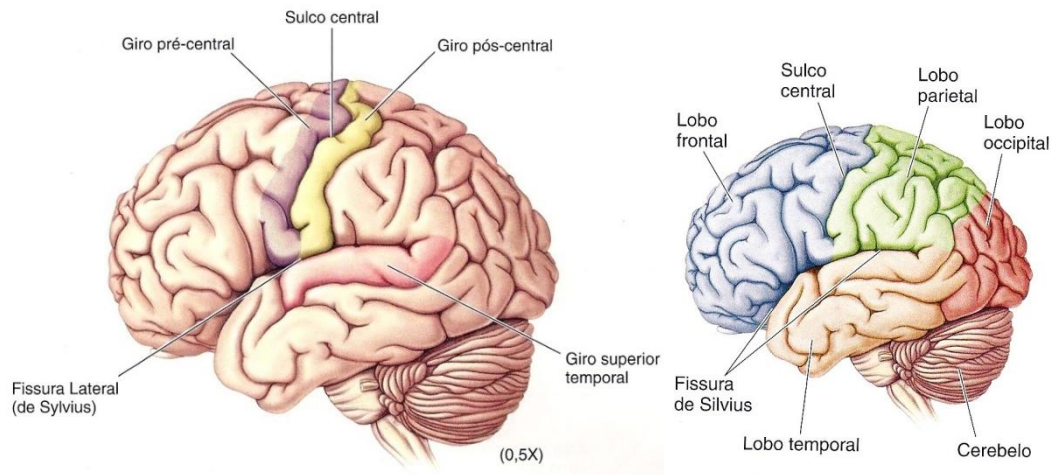


Figura 2.3 – Esquerda: Seleção de giros sulcos e fissuras; Direita: Localização dos quatro lobos cerebrais (Bear, et al., 2008).

2.2 Encéfalo

O encéfalo é o centro do sistema nervoso, sendo composto por um conjunto de estruturas que estão anatomicamente e fisiologicamente ligadas, sendo elas: bulbo raquidiano, hipotálamo, corpo caloso, cérebro, tálamo⁶, formação reticular e cerebelo (Figura 2.4) (Guyton & Hall, 2006).

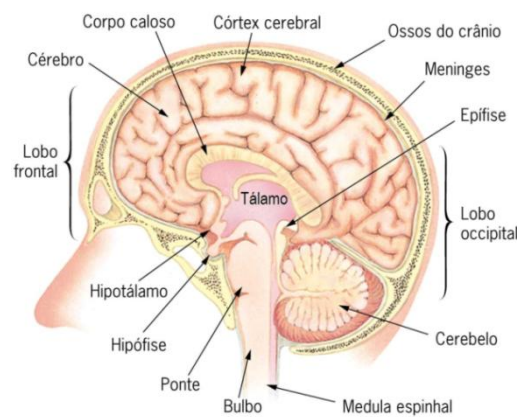


Figura 2.4 – Principais zonas do encéfalo (adaptado de Silva & Sasson, 2009).

O bulbo raquidiano interliga a medula ao cérebro controlando as funções fisiológicas vitais, como o ritmo cardíaco, a respiração, a pressão arterial, ou funções motoras básicas como engolir. O cerebelo é responsável pela manutenção do equilíbrio e coordenação da atividade motora; o mesencéfalo processa informação sensorial

⁶ Do grego, “leito conjugal” (Bear, et al., 2008).

(visual e auditiva). No tálamo chegam à maior parte das fibras sensitivas, e então, as informações sensoriais são retransmitidas para as respectivas áreas do córtex cerebral. O hipotálamo regula a temperatura corporal, a fome, a sede, o comportamento sexual, a circulação sanguínea e o funcionamento do sistema endócrino (regulação hormonal). O sistema límbico é constituído por hipocampo, septo, amígdala e o bolbo olfativo, sendo responsável por emoções, motivação e comportamento agressivo. O cérebro é órgão mais complexo do encéfalo, e será descrito em detalhes nas seções posteriores.

O encéfalo é revestido pelo couro cabeludo, crânio, membranas e líquido cefalorraquidiano. As membranas são chamadas de meninges⁷ e a mais externa é a dura-máter⁸ que protege o cérebro sobre o ponto de vista mecânico. A meninge intermediária, chamada aracnóide⁹, produz o líquido cefalorraquidiano (LCR). A meninge mais interna, chamada pia-máter¹⁰, age como uma barreira entre o sangue e o cérebro (Figura 2.6) (Balestro, 2009).

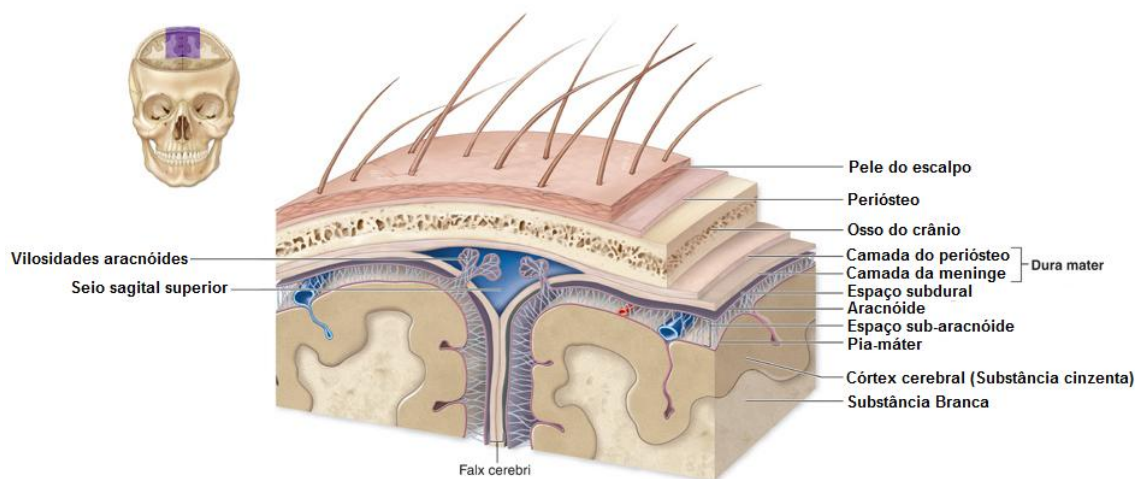


Figura 2.5 - Camadas de revestimento cerebral (adaptado de Balestro, 2009).

2.3 Cérebro

O cérebro é o maior órgão do encéfalo, sendo formado por dois hemisférios que estão separados pela profunda fissura sagital e unidos pelo corpo caloso. Cada hemisfério é constituído por uma camada de substância branca e outra de substância cinzenta, chamado córtex cerebral (Bear, et al., 2008). A substância branca é formada

⁷ Do grego, “revestimento” (Bear, et al., 2008).

⁸ Do latim, “mãe dura” (Bear, et al., 2008).

⁹ Do grego, “aranha” (Bear, et al., 2008).

¹⁰ Do latim, “mãe piedosa” (Bear, et al., 2008).

pelos axônios de neurônios, que se ligam entre si e a outras partes do encéfalo (Figura 2.6 - Esquerda). O córtex cerebral é uma camada de 1,25 a 4 mm de espessura e reveste todo o cérebro (Cheeín, 2005). Ele é formado pelos corpos celulares de neurônios e células de Glia (neurôglias) e realiza as funções importantes de cognição, personalidade e coordenação dos movimentos complexos.

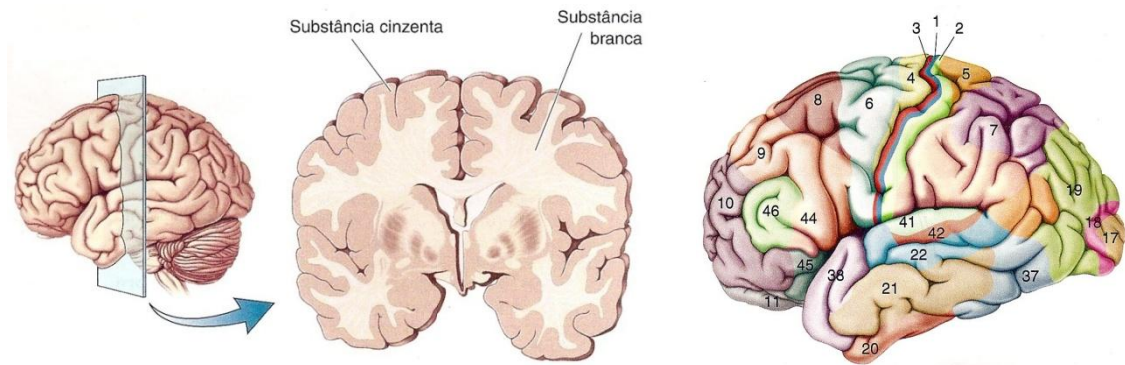


Figura 2.6 – Esquerda: Substância branca e substância cinzenta (adaptado de Bear, et al., 2008); Direita: Mapa citoarquitetônico de Brodmann (Bear, et al., 2008)..

O córtex cerebral organiza-se como uma concha de retalhos. As distintas áreas, identificadas primeiramente por Brodmann¹¹ (Figura 2.6 - Direita), diferem uma das outras em sua estrutura microscópica e sua função (Bear, et al., 2008). Na superfície inferior do lobo parietal e occipital junto com a ínsula está o córtex gustativo primário (área 43). No lobo temporal situa-se o córtex auditivo primário, ou A1 (áreas 41 e 42) e córtex olfativo. No lobo occipital encontra-se o córtex visual primário, ou V1 (áreas 17, 18 e 19). No lobo parietal localiza-se o córtex somatossensorial primário, ou S1 (áreas 1, 2 e 3). No lobo frontal localizam-se o córtex motor primário, ou M1 (área 4), a área motora suplementar (AMS) e a área pré-motora (APM) (área 6) (Figura 2.7).

¹¹ Korbinian Brodmann (1868-1918) foi um neurologista e psiquiatra alemão responsável pela subdivisão do córtex cerebral em 47 áreas funcionais, chamadas áreas de Brodmann (Bear, et al., 2008).

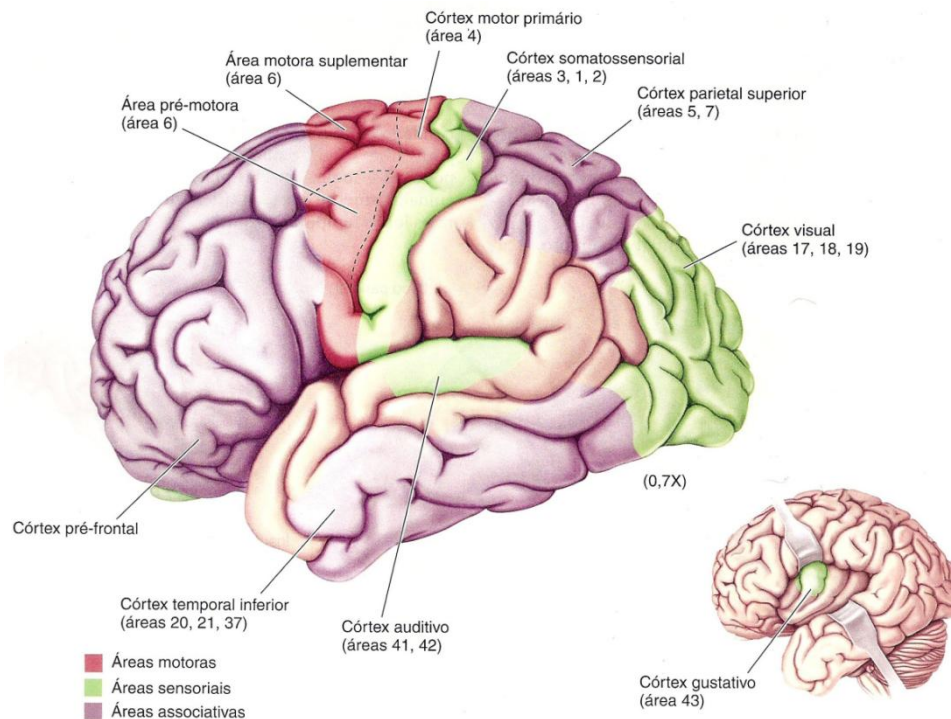


Figura 2.7 – Principais áreas corticais (adaptado de Bear, et al., 2008).

2.4 Tálamo

Toda informação que chega ao córtex cerebral passa pelo tálamo, que interliga as diferentes áreas do encéfalo. As informações provenientes dos sistemas sensoriais são enviadas ao tálamo que redireciona para áreas específicas do córtex cerebral. Da mesma forma, as informações sobre o controle do movimento voluntário percorrem o tálamo no sentido inverso, sendo originadas no córtex motor e direcionadas no tálamo para a medula espinhal (Bear, et al., 2008).

O tálamo está localizado no centro do cérebro, sendo formado por dois ovóides unidos pela aderência intertalâmica. O tálamo é fundamentalmente constituído de substância cinzenta, na qual se distinguem vários núcleos. Os núcleos talâmicos são muitos numerosos podendo ser divididos em cinco grupos, que são anterior, posterior, mediano, medial e lateral. Os núcleos do grupo anterior integram o sistema límbico e, portanto, estão relacionados ao comportamento emocional. O grupo posterior é formado pelo pulvinar e os corpos geniculados lateral e medial. O pulvinar integra áreas do córtex associadas à linguagem. O corpo geniculado medial, ou núcleo geniculado medial (NGM), integra áreas auditivas do córtex cerebral e o corpo geniculado lateral,

ou núcleo geniculado lateral (NLG), integra áreas visuais do córtex cerebral (Figura 2.8) (Machado, 2007).

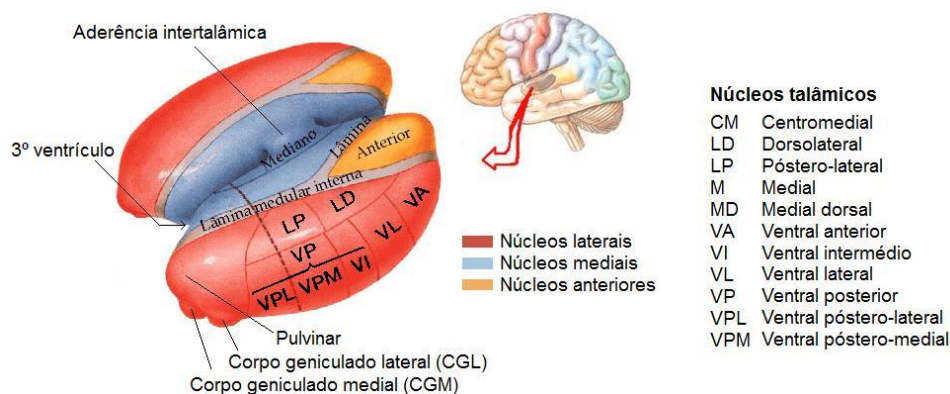


Figura 2.8 – Representação esquemática dos principais núcleos do tálamo.

O grupo lateral é subdividido em um subgrupo dorsal e um subgrupo ventral. Os núcleos do subgrupo ventral são considerados mais importantes, e são:

- i. *Núcleo ventral anterior (VA)*: recebe a maioria das fibras que provêm do globo pálido e se projeta para áreas motoras do córtex cerebral, possuindo função relacionada à motricidade somática.
- ii. *Núcleo ventral lateral (VL)*: recebe parte das fibras que provêm do globo pálido e as fibras do cerebelo e se projeta para áreas motoras do córtex cerebral.
- iii. *Núcleo ventral pósterio-lateral*: recebe as fibras do lemnisco¹² medial e espinhal e se projeta para o córtex somatossensorial.
- iv. *Núcleo ventral pósterio-medial (VPM)*: recebe fibras do lemnisco trigeminal e fibras gustativas e se projeta para áreas gustativas do córtex cerebral (Machado, 2007).

Também faz parte do grupo lateral o núcleo reticular do tálamo (do inglês, Thalamic Reticular Nucleus - TRN). Esse núcleo não tem projeções para o córtex cerebral e suas conexões principais são com os demais núcleos talâmicos, em que exerce uma atividade moduladora. Os núcleos do grupo mediano têm conexões principalmente com o hipotálamo e, possivelmente, relacionam-se com funções viscerais. Os núcleos do grupo medial compreendem os núcleos intralaminares e o núcleo medial dorsal. Os núcleos intralaminares têm conexões com a formação reticular. O núcleo medial dorsal tem conexões com o corpo amigdalóide, o hipotálamo

¹² Um tracto que atravessa o encéfalo, semelhante a uma fita (Bear, et al., 2008).

e a parte anterior do lobo frontal, denominada área de associação pré-frontal. Suas funções estão relacionadas às funções dessa área, que são o controle do comportamento emocional e manutenção da atenção (Machado, 2007).

Como exemplo, a informação gustativa de diferentes regiões da língua e cavidade da boca é conduzida para o bulbo por três nervos cranianos (VII, IX e X), depois subindo para o núcleo ventral póstero-medial (VPM) do tálamo, e finalmente, chegando ao córtex gustativo primário.

A informação olfativa é conduzida diretamente para o córtex olfativo através dos tractos¹³ olfatórios (I nervo craniano), mas estabelece conexão com o núcleo medial dorsal do tálamo para atingir áreas do neocórtex. A informação auditiva captada por receptores auditivos da cóclea¹⁴ é conduzida pelo nervo auditivo (VIII nervo craniano) para o núcleo geniculado medial do tálamo (NGM). Então, os neurônios do NGM projetam axônios para A1. O sistema vestibular, que informa a posição e movimento da cabeça provendo o sentido do equilíbrio, faz conexão com o núcleo ventral posterior do tálamo (VP). Então, os neurônios do VP projetam axônios para regiões próximas à representação da face em S1 e M1 (Bear, et al., 2008).

A informação visual captada por células fotossensíveis da retina é conduzida pelo nervo óptico (II nervo craniano) e prossegue pelos tractos ópticos para o núcleo geniculado lateral do tálamo (NGL) (vide apêndice A, sessões A.9 e A.10). Então, os neurônios do NGL projetam axônios para V1. Da mesma forma, o sistema sensorial somático, que envolve os sentidos de tato, temperatura, dor e posição corporal envia a informação proveniente dos receptores sensoriais através da medula espinhal. A informação sensorial prossegue pelo bulbo, ponte e mesencéfalo para o núcleo ventral posterior do tálamo (VP). Então, os neurônios do VP projetam axônios para S1. O sistema motor somático, que controla a atividade motora envia a informação proveniente de M1, AMS, APM e cerebelo através dos tractos cortiço-espinhal e rubro-espinhal que compõem as vias laterais da medula espinhal. Então, a informação prossegue pela medula espinhal até os órgãos efetores (Bear, et al., 2008).

A escolha e início dos movimentos voluntários parecem ocorrer num circuito chamado de alça motora. As áreas cognitivas do córtex frontal, pré-frontal e parietal estão conectadas aos núcleos da base¹⁵, nas profundezas do encéfalo. Os núcleos da

¹³ Agrupamento de axônios do SNC que possui origem e destino comum (Bear, et al., 2008).

¹⁴ Do latim, “caracol” (Bear, et al., 2008).

¹⁵ Impropriamente chamados de gânglios da base, ou gânglios basais (Machado, 2007).

base projetam uma aferência para o núcleo ventral lateral do tálamo (VL), chamada VLo. A aferência VLo é uma projeção dos axônios de VL para AMS, e por sua vez AMS está intensamente interconectada com M1. Assim, temos uma alça na qual a informação cicla do córtex aos núcleos da base e ao tálamo, e de volta para o córtex (Bear, et al., 2008).

Posteriormente nesse capítulo, descreveremos em mais detalhes alguns circuitos neurais do tálamo, visto que esses circuitos geram características oscilatórias importantes que podem ser medidas na superfície do escalpo.

2.5 Córtex motor primário, área motora suplementar e a área pré-motora

No presente estudo são analisados sinais eletroencefalográficos envolvidos em tarefas mentais de imaginação motora e geração de palavras, portanto as áreas cerebrais envolvidas nas respectivas tarefas mentais serão descritas em mais detalhes.

O córtex motor está localizado anteriormente ao sulco cortical central, no giro pré-central, ocupando aproximadamente um terço dos lobos frontais. O córtex somatossensorial, que alimenta o córtex motor com muito dos sinais que iniciam as atividades motoras, está localizado posteriormente ao sulco central, no giro pós-central (Bear, et al., 2008). A tarefa mental de imaginação motora é realizada no córtex motor que é subdividido em três áreas: córtex motor primário (M1), área pré-motora (APM) e área motora suplementar (AMS) (Figura 2.8).

O córtex motor primário é diretamente responsável pela coordenação dos movimentos voluntários. A figura 2.9 mostra o mapa somatotópico¹⁶ de M1, relacionando as áreas do córtex motor com o movimento de vários membros. Note que mais da metade do córtex motor primário compreende o controle dos músculos das mãos e os músculos da fala (Guyton & Hall, 2006).

A figura 2.10 mostra o mapa somatotópico de S1, relacionando às áreas do córtex somatossensorial com a sensibilidade de várias áreas do corpo. Note que a organização somatotópica do giro pré-central (M1) humano é muito semelhante aquela observada nas áreas somatossensoriais do giro pós-central (S1).

É importante salientar que nessa dissertação estaremos observando, através de eletrodos, as alterações eletrofisiológicas de áreas associadas à área correspondente ao

¹⁶ O mapeamento das sensações da superfície corporal ou o controle do movimento corporal em uma área do SNC é chamada somatotopia (Bear, et al., 2008).

movimento das mãos no giro pré-central, já que essa mesma área no giro pós-central corresponderia à sensibilidade de toque, pressão e temperatura das mãos. Porque nos interessa encontrar padrões eletrofisiológicos durante a intenção de movimento das mãos.

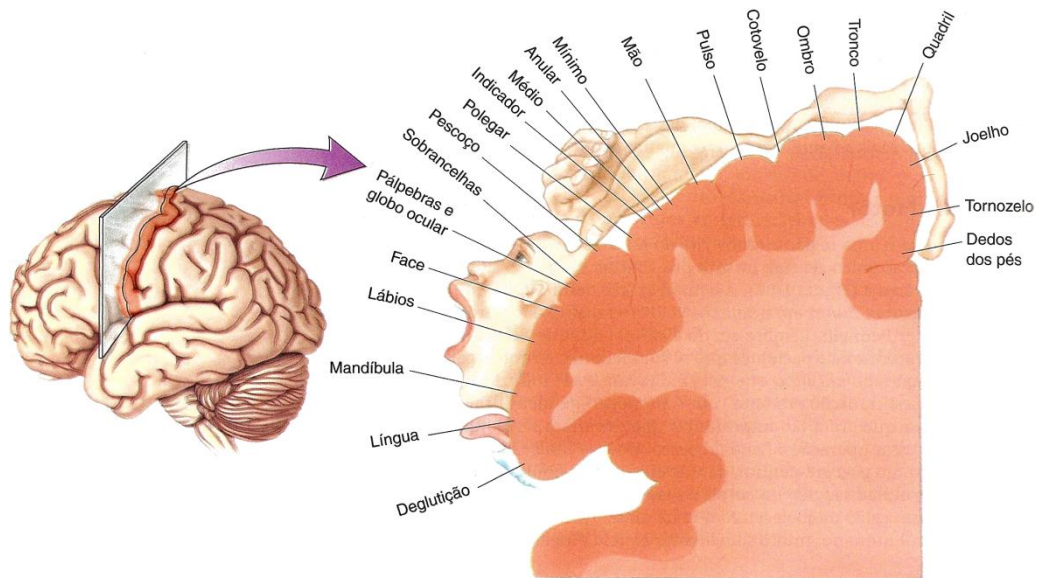


Figura 2.9 – Mapa somatotópico do giro pré-central humano (Bear, et al., 2008).

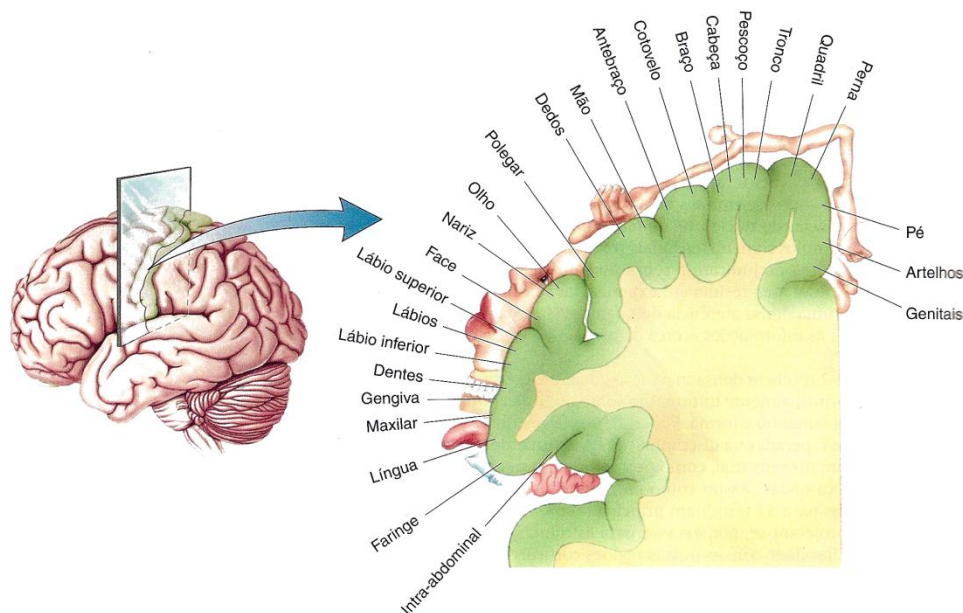


Figura 2.10 – Mapa somatotópico do giro pós-central humano (Bear, et al., 2008).

A área pré-motora tem por função dar suporte aos movimentos gerados no córtex motor primário de ambos os hemisférios. Significa que para realizar um

movimento desejado para a mão também é necessário mover braço e ombro. Para conseguir tal resultado a área pré-motora, ou córtex pré-motor, realiza uma “imagem motora” do movimento muscular a ser realizado (Bear, et al., 2008).

Os sinais associados a essa “imagem motora” são enviados diretamente da APM ao M1 para excitar múltiplos grupos de músculos relacionados à realização da tarefa. Frequentemente os sinais também são enviados pelos núcleos da base e o tálamo para o córtex motor primário através do circuito da alça motora. A área motora suplementar tem ainda outra organização topográfica para o controle da função motora. Em geral, esta área funciona em conjunto com a área pré-motora para prover movimentos de postura de diferentes segmentos do corpo, movimentos de posição da cabeça e dos olhos, assim por diante, como pano de fundo para o melhor controle motor dos braços e mãos pela área pré-motora e o córtex motor primário (Guyton & Hall, 2006).

Estudos em humanos realizados pelo neurologista dinamarquês Per Roland utilizando tomografia por emissão de pósitrons (TEP) para monitorar alterações nos padrões de ativação cortical que acompanham movimentos voluntários, mostraram que a realização de movimentos dos dedos aumenta o fluxo sanguíneo das seguintes regiões: áreas somatossensoriais, córtex parietal posterior, partes do córtex pré-frontal e as áreas M1, AMS e AMP. Quando solicitado aos participantes que apenas ensaiassem mentalmente o movimento, sem de fato mover os dedos, a área 6 (AMS e APM) manteve-se ativa, mas a área 4 (M1) não (Bear, et al., 2008).

Outro estudo relacionado à imaginação de movimento das mãos foi realizado por R. Beisteiner et. al. utilizando sinais eletroencefalográficos. Esse estudo mostrou que a imaginação de movimento das mãos envolve as áreas das mãos de M1 e as áreas adjacentes como AMS e APM, confirmando os resultados obtidos através de estudos com magnetoencefalografia (MEG) (Beisteiner, et al., 1995).

2.6 Área de Broca e área de Wernicke

A tarefa mental de geração de palavras é realizada na área de Broca¹⁷. O processamento da linguagem, compreensão e produção da fala ocorre na área de Broca,

¹⁷ Área denominada em homenagem ao neurologista francês, Paul Broca (1824-1880), que estudou afasias da linguagem e identificou a dominância do lobo frontal esquerdo sobre a expressão da linguagem (Bear, et al., 2008).

enquanto a associação de informações e interpretação ocorre na área de Wernicke¹⁸ (Fig. 2.11), que desempenha um papel muito importante na produção de discurso. É esta área que nos permite compreender o que os outros dizem e que nos faculta a possibilidade de organizarmos as palavras sintaticamente corretas. Em 95% das pessoas a área de Broca está localizada no hemisfério esquerdo (Guyton & Hall, 2006).

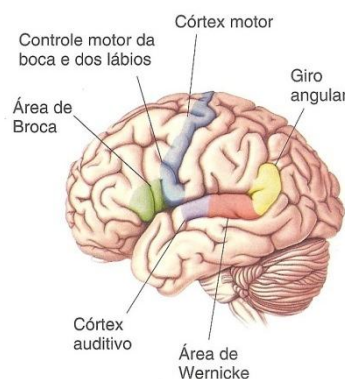


Figura 2.11 – Localização da área de Broca e área de Wernicke (Bear, et al., 2008).

2.7 Medula espinhal

Juntos, o sistema motor somático e o SNV constituem todas as eferências neurais do SNC. O encéfalo envia os sinais de controle muscular do sistema motor somático e recebe informações sensoriais do sistema sensorial somático através de 12 pares de nervos cranianos, que inervam principalmente a cabeça e 31 pares de nervos na medula espinhal, que é conduzida no interior da coluna vertebral (Figura 2.12 - Esquerda). Os axônios que levam sinais estimulatórios do encéfalo para órgãos efetores como músculos e glândulas, através da medula espinhal, são nervos eferentes¹⁹ primários do sistema motor somático. Os axônios eferentes primários entram na medula espinhal através das raízes ventrais. Então, as raízes ventrais da medula espinhal conduzem a informação proveniente do sistema motor somático e a informação proveniente de neurônios pré-ganglionares que controlam neurônios pós-ganglionares nos gânglios da cadeia simpática (vide apêndice A, sessão A.8) (Bear, et al., 2008).

Os axônios que levam informação dos receptores sensoriais da pele, dos músculos e das articulações ao encéfalo, através da medula espinhal, são os nervos

¹⁸ Área denominada em homenagem ao neurologista alemão, Karl Wernicke (1848-1905), que estudou afasias da linguagem e mostrou que lesões no hemisfério esquerdo, em uma área distinta da área de Broca, também prejudicavam a fala normal (Bear, et al., 2008).

¹⁹ Do latim, “que traz” (Bear, et al., 2008).

aferentes²⁰ primários do sistema sensorial somático. Os axônios aferentes primários entram na medula espinhal através das raízes dorsais; seus corpos celulares estão nos gânglios da raiz dorsal (Bear, et al., 2008). Assim, as duas raízes da medula espinhal transmitem informação em sentidos opostos.

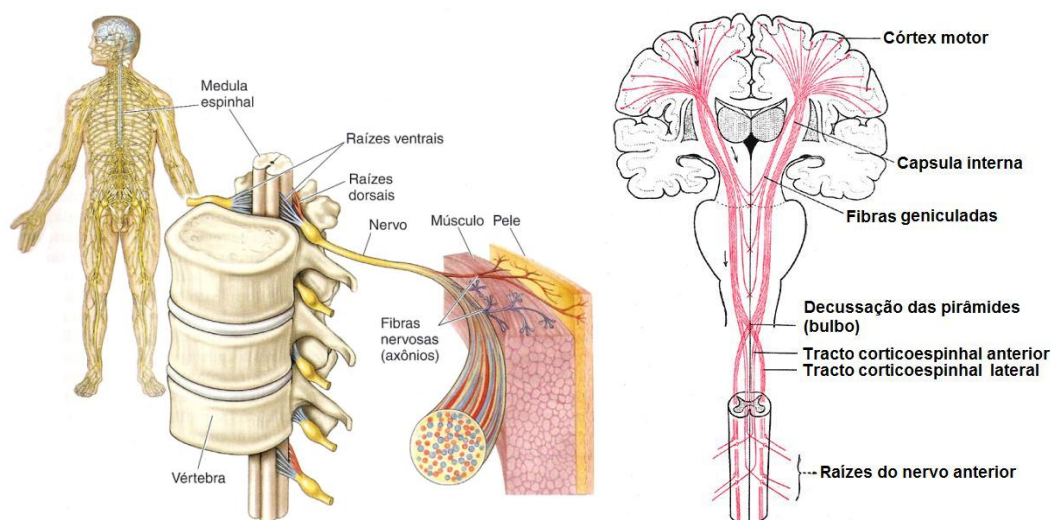


Figura 2.12 – Esquerda: Nervos espinhais e raízes nervosas espinhais (Bear, et al., 2008); Direita: Sistema piramidal.

2.8 Tracto piramidal

Como explicado na sessão anterior, a transmissão dos sinais motores do encéfalo ocorre na raiz ventral da medula espinhal. O caminho envolvendo a transmissão desde o córtex motor até os músculos é chamado tracto córtico-espinhal, ou tracto piramidal. A transmissão ocorre diretamente no tracto piramidal e indiretamente através de múltiplas vias acessórias que envolvem os núcleos da base, cerebelo, e vários núcleos do tronco cerebral. O tracto piramidal tem origem no córtex motor primário (30%), áreas pré-motora e suplementar (30%) e área somatosensorial (40%) (Guyton & Hall, 2006).

O tracto córtico-espinhal é composto principalmente de axônios motores, constituindo o componente voluntário da motricidade. As vias piramidais consistem em um único tracto, originado no encéfalo, que se divide em dois tractos separados na medula espinhal: o tracto córtico-espinhal lateral e o tracto córtico-espinhal anterior (Figura 2.12 - Direita). De todas as fibras do tracto córtico-espinhal, 80% cruzam de

²⁰ Do latim, “que leva” (Bear, et al., 2008).

lado na decussação²¹ das pirâmides no bulbo²² (contralateralmente), compondo a via piramidal cruzada, que é composta pelo tracto córtico-espinhal lateral. De todas as fibras do tracto córtico-espinhal, 20% seguem caudalmente pelo funículo lateral da medula (ipsilateralmente), gerando o tracto córtico-espinhal anterior, que cruza apenas no nível medular em que fazem sinapse com a coluna anterior (Guyton & Hall, 2006).

O comportamento das vias piramidais leva à conclusão de que a motricidade voluntária é 100% cruzada, seja a nível bulbar, seja a nível medular. Portanto, a área motora de um hemisfério cerebral é responsável pelo controle dos movimentos voluntários do lado oposto do corpo, esse fenômeno é denominado contralateralidade dos movimentos motores. Então, o córtex motor do hemisfério esquerdo está relacionado à imaginação de movimento da mão direita e vice-versa.

2.9 Córtex cerebral humano

O córtex cerebral humano é uma estrutura laminar formada por 6 camadas distintas com diferentes tipos de corpos celulares de neurônios. A Figura 2.13 mostra uma representação esquemática das camadas corticais, tais como aparecem em preparações histológicas coradas por diferentes métodos. Em (A) utilizou-se o método de Golgi para visualizar os prolongamentos neuronais. Em (B) utilizou-se o método de Nissl para visualizar os corpos celulares e em (C) utilizou-se o método de Weigert para visualizar as fibras mielínicas (Machado, 2007).

Perpendicularmente às camadas, existem grandes neurônios, chamados neurônios piramidais, que ligam as várias camadas entre si e representam cerca de 85% dos neurônios no córtex. Podem receber entradas de milhares de outros neurônios e podem transmitir sinais a distâncias de centímetros e atravessando várias camadas do córtex (Guyton & Hall, 2006). As diferentes funções dos neurônios de cada camada cortical do córtex somatosensorial são descritas no apêndice A, sessão A.1.

Os tecidos cerebrais são compostos basicamente por 10% de células nervosas (neurônios) e 90% de células gliais (células de sustentação). Apesar da inferioridade numérica, os neurônios são as unidades básicas do sistema nervoso, recebendo,

²¹ O cruzamento de axônios de um lado ao outro chama-se *decussação* (Bear, et al., 2008).

²² A secção transversal do bulbo no nível da decussação mostra que o tracto cortico-espinhal forma uma protuberância triangular, razão pela qual essa área é denominada pirâmide bulbar. Pela mesma razão o tracto córtico-espinhal também é chamado de tracto piramidal (Bear, et al., 2008).

codificando e enviando informações. Estima-se que o cérebro humano seja constituído por cerca de 100 bilhões de neurônios (Sala, 2005).

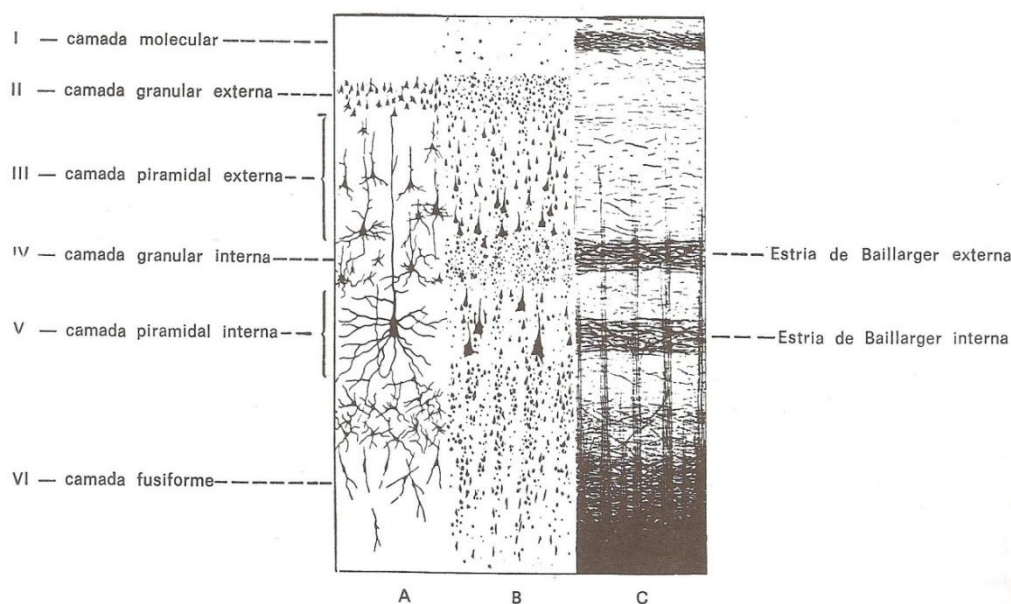


Figura 2.13 – Camadas do córtex cerebral (Machado, 2007).

2.9.1 Células gliais

As principais funções das células da glia²³ (astrócitos, oligodendrócitos, célula endotelial, célula radial glial) são cercar os neurônios mantendo-os fisicamente no seu lugar, fornecer nutrientes e oxigênio, isolar um neurônio do outro, destruir patógenos e remover neurônios mortos. Os astrócitos ligam neurônios a vasos sanguíneos, participam ativamente nas transmissões sinápticas, regulando a liberação de neurotransmissores e libertando ATP²⁴, que modela funções pré-sinápticas (Figura 2.14). Os oligodendrócitos fabricam mielina a partir de lipídios e proteínas. As células endoteliais revestem as cavidades do encéfalo e da medula entrando em contato com o líquido cefalorraquidiano. A célula radial glial participa na comunicação bidirecional dos neurônios.

²³ O termo *glia* origina-se da palavra grega para “cola” (Bear, et al., 2008).

²⁴ Trifosfato de Adenosina é um nucleotídeo responsável pelo armazenamento de energia em suas ligações químicas. É constituída por adenosina, uma base nitrogenada, associada a três radicais fosfato conectados em cadeia. A energia é armazenada nas ligações entre os fosfatos.

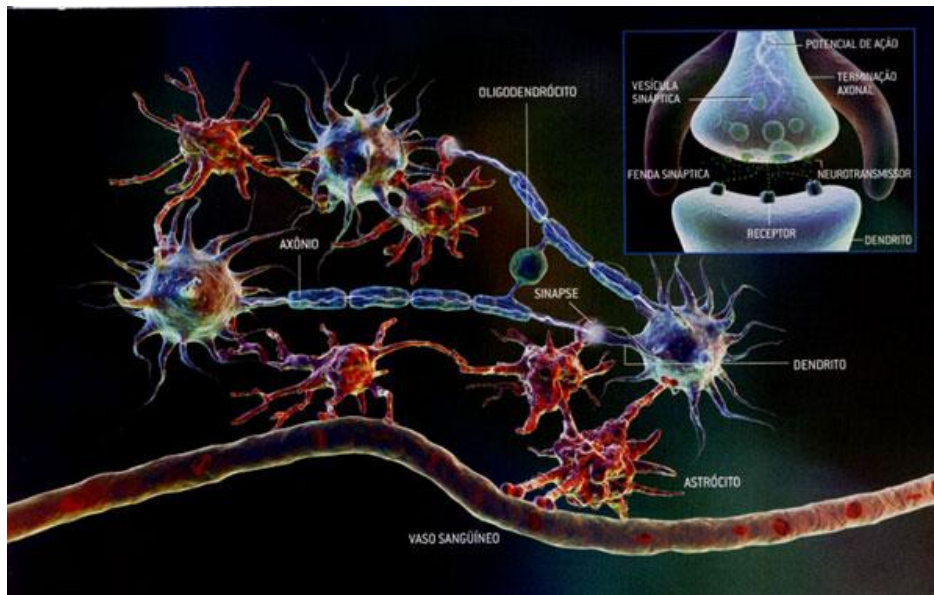


Figura 2.14 – Células do tecido cerebral (neurônios, astrócitos e oligodendrócitos).

2.9.2 Células nervosas

Em geral todos os neurônios são compostos pelos mesmos constituintes básicos, o corpo celular (soma) que é constituído de núcleo e pericário e dá suporte metabólico à célula e as irradiações do soma chamados neuritos. Os neuritos são de dois tipos, axônios e dendritos²⁵. O corpo celular freqüentemente origina um único axônio (fibra nervosa), geralmente maior que os dendritos, e pode se prolongar por grandes distâncias no corpo (um metro ou mais). Os axônios freqüentemente se ramificam, e essas ramificações são chamadas de colaterais axonais. Ocasionalmente, uma colateral pode retornar e comunicar-se com a célula que deu origem ao axônio. Essas ramificações chamam-se colaterais recorrentes (Bear, et al., 2008).

O axônio é responsável pela condução dos impulsos nervosos e para isso possuem um invólucro lipídico, chamada bainha de mielina, que atua como isolante. Em toda sua extensão, o axônio é envolvido por oligodendrócitos e células de Schwann que determinam a formação da bainha de mielina. Entre uma célula de Schwann e outra existe uma região de descontinuidade da bainha de mielina, que acarreta a existência de uma constrição (estrangulamento) denominada nodo de Ranvier. A parte celular da bainha de mielina, onde estão o citoplasma e o núcleo da célula de Schwann, constitui o neurilema; Os dendritos são prolongamentos menores em forma de ramificações (arborizações terminais) que emergem do pericário e do final do axônio, sendo, na

²⁵ O termo *dendrito* é derivado da palavra grega para “árvore” (Bear, et al., 2008).

maioria das vezes, responsáveis pela comunicação entre os neurônios, através das sinapses (Figura 2.15 - Esquerda) (Lopes, 2005).

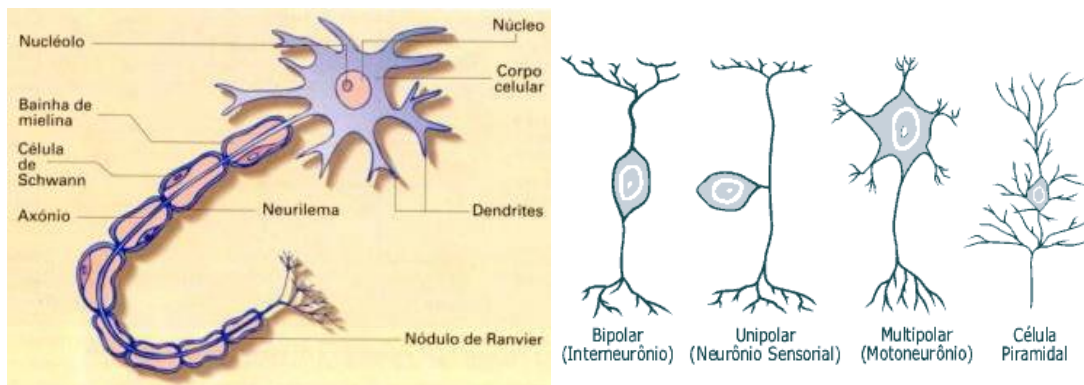


Figura 2.15 – Esquerda: Morfologia básica de um neurônio (Vilela, 2009). Direita: Principais tipos de neurônios (HowStuffWorks, 2009).

Existem diversos tipos de neurônios com diferentes funções dependendo de sua localização e estrutura morfológica. Os neurônios recebem diferentes classificações baseadas no número de neuritos, nos dendritos, nas conexões, no comprimento do axônio e nos neurotransmissores:

- i. Classificação baseada no número de neuritos: um neurônio que apresenta um único neurito é dito unipolar. Se possui dois neuritos, a célula é bipolar, e, se apresenta três ou mais, a célula é multipolar.
- ii. Classificação baseada nos dendritos: o córtex cerebral possui duas grandes classes de arborização dendrítica, as células estreladas e as células piramidais.
- iii. Classificação baseada nas conexões: as informações (aferências) chegam ao sistema nervoso por meio de neurônios que apresentam neuritos nas superfícies sensoriais do corpo. Células com esse tipo de conexão são os neurônios sensoriais primários. Outros neurônios apresentam axônios que formam sinapses com músculos e comandam os movimentos; esses são chamados neurônios motores. No entanto, a maioria dos neurônios do sistema nervoso forma conexões apenas com outros neurônios. Essas células são chamadas interneurônios (Figura 2.15 - Direita).
- iv. Classificação baseada no comprimento do axônio: alguns neurônios possuem longos axônios que se estendem de uma do encéfalo para outra; esses são ditos *neurônios de Golgi tipo I*. Outros neurônios possuem axônios curtos e são

chamados *neurônios de Golgi tipo II*. As células piramidais são neurônios de Golgi tipo I enquanto as células estreladas são neurônios de Golgi tipo II.

- v. Classificação baseada nos neurotransmissores: conjuntos de células que utilizam um mesmo neurotransmissor formam os sistemas de neurotransmissores do encéfalo. Neurônios colinérgicos utilizam o neurotransmissor acetilcolina (ACh). Neurônios catecolaminérgicos utilizam os neurotransmissores dopamina (DA), noradrenalina (NA) e a adrenalina. Neurônios serotoninérgicos utilizam o neurotransmissor serotonina. Neurônios aminoacidérgicos utilizam os neurotransmissores glutamato (Glu), glicina (Gly) e ácido gama-aminobutírico (GABA) (Bear, et al., 2008).

Os neurônios colinérgicos são neurônios motores da medula espinhal e do tronco encefálico. Os neurônios catecolaminérgicos são encontrados em regiões do sistema nervoso envolvidas na regulação do humor, da atenção e das funções viscerais. Os neurônios serotoninérgicos são pouco numerosos e encontrados nos sistemas encefálicos regulando o humor, comportamento emocional e o sono. Os neurônios aminoacidérgicos compõem a maioria dos neurônios do SNC (Bear, et al., 2008).

2.10 Impulso nervoso

Dois tipos de fenômenos estão envolvidos no processamento do impulso nervoso: os fenômenos elétricos e químicos. Os eventos elétricos propagam o sinal dentro de um neurônio (potencial de ação), e os eventos químicos transmitem o sinal de neurônio a outro (sinapses²⁶).

O potencial de ação é o impulso nervoso transmitido pelo neurônio através do axônio. Este potencial só consegue se propagar pelo axônio se a membrana celular do cone de implantação axonal, que está com o potencial de repouso (-65mV), for excitada por um valor acima de um limiar (-45mV) (Bear, et al., 2008) Para uma melhor compreensão, o potencial de repouso, o potencial de ação e o potencial de limiar são descritos no apêndice A, sessões A.2, A.3 e A.4, respectivamente.

Os estímulos são transmitidos de um neurônio para outro nos dendritos onde ocorrem as sinapses. As sinapses podem ser de natureza elétrica ou química. Nas sinapses elétricas a separação entre as terminações nervosas dos neurônios é muito

²⁶ Expressão cunhada pelo fisiologista inglês Sir Charles Sherrington (1857-1952), que deriva de um termo grego que significa “amarrar junto” (Bear, et al., 2008).

pequena e recebe o nome de junção comunicante. Nas junções comunicantes existem proteínas especiais denominadas conexinas. Seis conexinas reunidas formam um canal chamado conéxon, e os dois conéxons (um de cada célula) são combinados para formar um canal de junção comunicante. Por esses canais passam íons e pequenas moléculas orgânicas permitindo que a corrente iônica do neurônio pré-sináptico se propague diretamente para o neurônio pós-sináptico. Essa corrente iônica causa um potencial pós-sináptico (PPS) no neurônio pós-sináptico. Portanto um potencial de ação no neurônio pré-sináptico pode produzir, quase que instantaneamente, um potencial de ação no neurônio pós-sináptico. As sinapses que ocorrem no SNC são sinapses químicas. Nessas sinapses a separação entre as terminações nervosas dos neurônios é 10 vezes maior que a separação da junção comunicante e recebe o nome de fenda sináptica. Na fenda sináptica o estímulo é transmitido por meio de mediadores químicos, os neurotransmissores (Bear, et al., 2008).

A maioria dos neurotransmissores é classificado em 3 categorias químicas: aminoácidos, aminas e peptídeos. A transmissão sináptica rápida das sinapses do SNC é mediada pelos neurotransmissores aminoácidos glutamato (Glu), ácido gama-aminobutírico (GABA) e glicina (Gly). A transmissão sináptica rápida das sinapses das junções neuromusculares é mediada pela amina acetilcolina (ACo). As formas mais lentas de transmissão sináptica no SNC e na periferia são mediadas por neurotransmissores de todas as três categorias (Bear, et al., 2008).

Quando um impulso elétrico transmitido pelo axônio chega a seu término, ele dispara vesículas que contêm um neurotransmissor. As vesículas se movem na direção da membrana terminal e se fundem com ela, liberando os neurotransmissores na fenda sináptica. Assim, o neurotransmissor pode se ligar aos receptores (proteínas específicas) na membrana de um neurônio vizinho.

Receptores conhecidos como canais iônicos ativados por transmissores são proteínas transmembrana compostas por quatro ou cinco subunidades, que, juntas, formam um poro. Na ausência do neurotransmissor, o poro do receptor está freqüentemente fechado. Quando o neurotransmissor se liga a sítios específicos da região extracelular do canal, ele induz uma mudança conformacional que causa a abertura do poro (Figura 2.16 - Esquerda) (Guyton & Hall, 2006). Para uma melhor compreensão a liberação de neurotransmissores é descrita no apêndice A, sessão A.6.

Se o neurotransmissor tende a levar o potencial da membrana mais para perto do limiar capaz de gerar o potencial de ação, o efeito é dito excitatório (Figura 2.16 -

Direita (B)). Uma despolarização transitória da membrana pós-sináptica causada por uma liberação pré-sináptica de neurotransmissores é denominada potencial excitatório pós-sináptico (PEPS). A ativação sináptica de canais iônicos abertos por acetilcolina e por glutamato causam PEPS (Bear, et al., 2008).

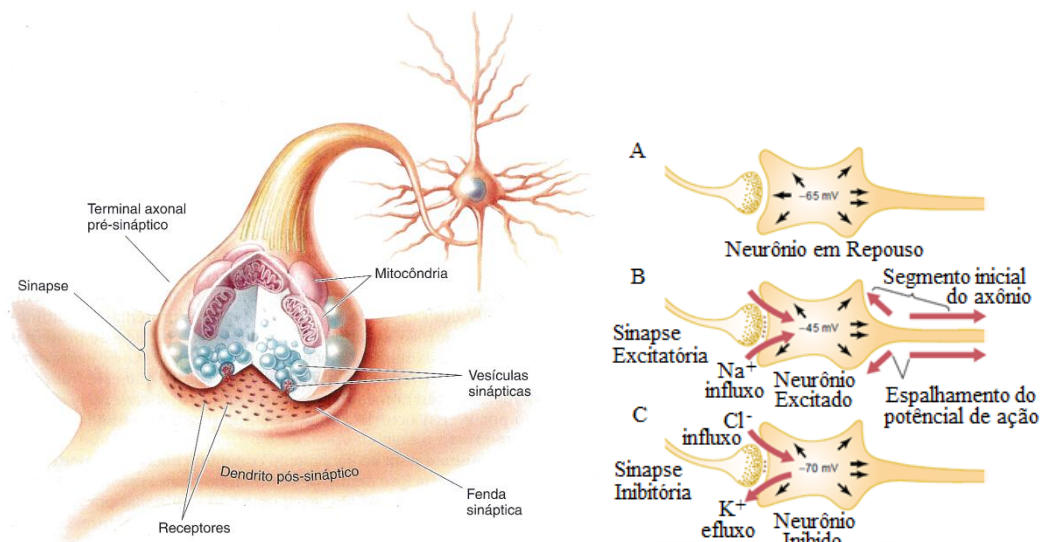


Figura 2.16 – Esquerda: Junção entre um neurônio pré-sináptico e um neurônio pós-sináptico (Bear, et al., 2008). Direita: Eventos eletroquímicos da sinapse excitatória e inibitória (adaptado de (Guyton & Hall, 2006)).

Se o neurotransmissor hiperpolariza a membrana da célula pós-sináptica, tornando-a mais negativa que o potencial de repouso, o efeito é dito inibitório (Figura 2.16 – Direita (C)). Pois, nesse caso, o neurotransmissor tende a afastar o potencial da membrana do limiar da geração do potencial de ação. Uma hiperpolarização transitória da membrana pós-sináptica causada por uma liberação pré-sináptica de neurotransmissores é denominada potencial inibitório pós-sináptico (PIPS). A ativação sináptica de canais iônicos abertos por glicina e por GABA causam PIPS (Guyton & Hall, 2006).

Uma única célula nervosa normalmente possui centenas ou milhares de sinapses químicas excitatórias e inibitórias que chegam a seus dendritos ou corpo celular. Se o resultante de todos os estímulos for um pulso que seja capaz de despolarizar a membrana celular do cone de implantação axonal até o potencial limiar (-45mV) o potencial de ação resultante será transmitido pelo axônio do neurônio (Bear, et al., 2008). A integração sináptica é o processo em que múltiplos potenciais sinápticos se combinam em um neurônio pós-sináptico. Para uma informação mais detalhada sobre

integração sináptica e a velocidade de propagação do potencial de ação, vide o apêndice A, sessões A.5 e A.7.

2.11 Atividade oscilatória

A atividade de um grande número de neurônios pode estar sincronizada, isto é, os neurônios emitem potenciais de ação aproximadamente no mesmo instante. Os potenciais de ação, então, induzem a liberação de neurotransmissor nos dendritos de maneira síncrona, e dessa forma os potenciais pós-sinápticos (PPS) dos neurônios vizinhos se somam, formando um grande PPS. A atividade de um grande número de neurônios produzirá PPSs sincronizados de duas maneiras fundamentais: (1) esses neurônios podem obter as informações de um relógio central ou marca-passo, ou (2) podem compartilhar ou distribuir a função de marcador de tempo entre eles, excitando ou inibindo um ao outro (Bear, et al., 2008).

Os PPSs síncronos ocasionam ritmos elétricos que são abundantes no córtex cerebral, fato que será abordado no próximo capítulo, que trata do sinal eletroencefalográfico (EEG). As diferentes frequências e amplitudes dos ritmos de EEG são utilizadas para distinguir diferentes estados mentais, como os estágios do sono e o estado de coma. No encéfalo de mamíferos, a atividade rítmica sincrônica é usualmente coordenada por uma combinação de marca-passos e métodos coletivos. O tálamo com sua maciça eferência para todo o córtex, pode atuar como um poderoso marca-passo. Alguns ritmos do córtex cerebral não dependem do marca-passo talâmico, mas se baseiam, em vez disso, nas interações coletivas e cooperativas dos próprios neurônios corticais. Nesse caso as interconexões excitatórias e inibitórias dos neurônios resultam em um padrão de atividade sincrônico coordenado, que pode permanecer localizado ou se difundir para abranger regiões muito maiores do córtex (Bear, et al., 2008).

Para explicar a origem da atividade oscilatória no tálamo e em diversas áreas do córtex, serão definidos primeiramente os circuitos neuronais e os circuitos neuronais oscilatórios.

2.11.1 Circuitos neuronais

Os neurônios que interligam o sistema nervoso e as diferentes camadas do cérebro formam circuitos neuronais. Os circuitos neuronais transmitem informação

através de sinapses excitatórias e inibitórias que geram ou não um potencial de ação. Em alguns circuitos neuronais, a entrada de um sinal provoca uma sinapse excitatória em uma direção e uma sinapse inibitória em outra direção. A figura 2.17 mostra como a inibição ocorre. A fibra (neurônio sensorial) de entrada excita diretamente o neurônio #1 e simultaneamente excita o neurônio inibitório intermediário (neurônio #2), que secreta um diferente tipo de neurotransmissor para inibir o neurônio #3. Esse tipo de circuito é importante para prevenir excesso de atividade em muitas partes do cérebro (Guyton & Hall, 2006).

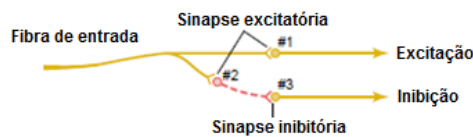


Figura 2.17 – Circuito neuronal excitatório-inibitório (adaptado de (Guyton & Hall, 2006).

2.11.2 Circuitos neuronais oscilatórios

Os circuitos neuronais oscilatórios são os mais importantes circuitos neuronais do sistema nervoso. Um circuito muito simples consistindo somente em um neurônio excitatório e um neurônio inibitório é mostrado na Figura 2.18. Na Figura 2.18 - Esquerda, uma célula excitatória (célula E) e uma célula inibitória (célula I) estabelecem sinapses uma com a outra. Contando que exista uma condução excitatória constante sobre a célula, a qual não precisa ser rítmica, a atividade tende a ficar oscilando entre os dois neurônios. Um ciclo de atividade através dessa rede gera o padrão de disparo mostrado na Figura 2.18 - Direita.

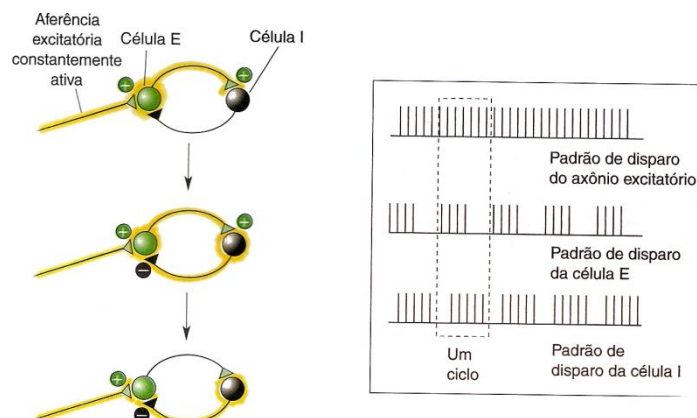


Figura 2.18 – Oscilador de dois neurônios (adaptado de Bear, et al., 2008).

Outro tipo de circuito neuronal oscilatório é formado por realimentação positiva dentro do mesmo circuito. Conseqüentemente, uma vez estimulado, o circuito pode produzir estímulos periódicos por longos períodos. O circuito oscilatório mais simples é mostrado na figura 2.19-A. Esse circuito envolve apenas um neurônio cuja parte de sua saída se estende aos seus próprios dendritos para se re-estimular. A figura 2.19-B mostra um circuito com neurônios adicionais para a realimentação. A figura 2.19-C mostra um circuito um pouco mais complexo, com neurônios facilitadores e inibidores. A figura 2.19-D mostra um circuito oscilatório com vários neurônios paralelos. Nesse sistema, o sinal oscilatório pode ser forte ou fraco, dependendo do número de neurônios paralelos envolvidos na realimentação (Guyton & Hall, 2006).

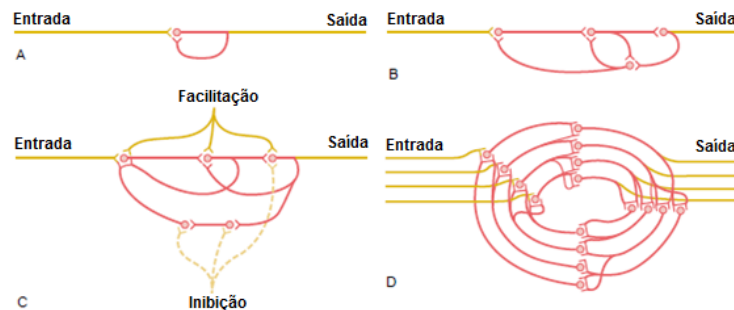


Figura 2.19 – Circuitos neurais oscilatórios (adaptado de Guyton & Hall, 2006).

2.12 Atividade oscilatória e modulatória do sistema tálamo-cortical

A atividade oscilatória medida no sinal de EEG é uma propriedade emergente do sistema tálamo-cortical ou cortico-cortical. Os diferentes ritmos oscilatórios são mediados por dois tipos de mecanismos:

- i. Mecanismos intrínsecos, que dependem de propriedades de neurônios e dinâmicas do processo de sinapses;
- ii. Mecanismos extrínsecos ou mecanismos de rede, que exigem a interação dos neurônios excitatórios e inibitórios no âmbito de uma população. A força e extensão das interconexões entre os elementos da rede, geralmente formadas por loops de realimentação. Diferentes tipos de realimentações podem ser distinguidas, envolvendo tálamo-cortical ou cortico-cortical em pequenas ou grandes distâncias (Pfurtscheller & Lopes, 1999);

Conforme foi descrito na seção 2.4, o grupo lateral do tálamo é formado por dois subgrupos, o tálamo dorsal e o tálamo ventral. O tálamo dorsal é composto por cerca de

15 núcleos de células relé²⁷, ou células de retransmissão (do inglês, Thalamic Relay Cells - TCR). A maior parte do tálamo ventral é o núcleo reticular talâmico (do inglês, Thalamic Reticular Nucleus - TRN) que é composto por células reticulares que se projetam para o tálamo dorsal para inibir as células de retransmissão. Outro componente celular do tálamo são os inter-neurônios (Figura 2.15 - Direita) que se localizam próximas das células reticulares para inibi-las.

As células talâmicas de retransmissão (TCR) apresentam uma vasta gama de condutâncias iônicas nas membranas dendríticas de sua soma. A maior parte destas condutâncias é utilizada para a polarização e despolarização da membrana da célula através de sinapses excitatórias e inibitórias. Se a célula for excitada acima de um limiar (Limiar de Excitação) ocorre um pico de tensão (PA - Potencial de Ação), que se propaga através da soma e dendritos. Todo o processo ocorre de forma análoga ao processo que ocorre nos neurônios (Scholarpedia, 2009).

A maior parte das células de retransmissão (TCR) inerva as camadas intermediárias do córtex cerebral, e de fato, toda informação que chega ao córtex cerebral passa pelo tálamo. Assim, o tálamo representa o estrangulamento final do fluxo de informação antes de ela chegar ao córtex, e sua função é modificar o fluxo de informação, preparando-a para os processos que ocorrem no córtex. Em certas condições, os neurônios talâmicos podem gerar descargas de potenciais de ação precisamente rítmicas. O mecanismo de oscilação do sistema tálamo-cortical apresenta o aspecto de auto-realimentação dos circuitos oscilatórios mostrados na Figura 2.19, como também apresenta o conjunto excitação-inibição do circuito oscilatório mostrados na Figura 2.18.

As células talâmicas apresentam um conjunto particular de canais iônicos dependentes de voltagem (vide apêndice A, sessão A.4), o que permite que cada célula gere padrões de descarga rítmica auto-sustentáveis, mesmo quando não existe aferência externa ativando a célula. A atividade rítmica dos neurônios marca-passo talâmicos torna-se então sincronizada com muitas outras células talâmicas. Conexões sinápticas entre neurônios talâmicos excitatórios e inibitórios forçam cada neurônio a igualar-se ao ritmo do grupo. Esses ritmos coordenados são passados ao córtex pelos axônios tálamo-corticais, os quais excitam neurônios corticais. Desse modo, um grupo relativamente pequeno de células talâmicas centralizadas pode compelir um grupo muito maior de

²⁷ O nome dessas células faz analogia ao dispositivo elétrico relé, que intervém na passagem de corrente elétrica (Bear, et al., 2008).

células corticais a seguir o ritmo talâmico (Bear, et al., 2008). A figura 2.20 mostra o esquema em que os ritmos do tálamo comandam os ritmos no córtex. Em verde está representado uma população de neurônios excitatórios do tálamo e, em preto uma população de neurônios inibitórios.

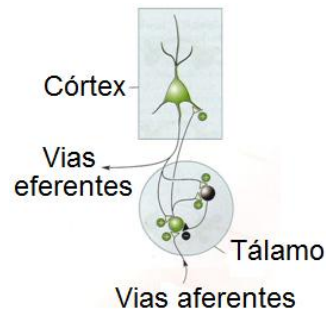


Figura 2.20 – Ritmos do tálamo comandam os ritmos no córtex cerebral (adaptado de Bear, et al., 2008).

Nos núcleos talâmicos ocorre uma transformação considerável de informação. Uma transformação comum é a amplificação de diferenças na atividade em relação a neurônios vizinhos, fenômeno também conhecido como aumento de contraste. Um mecanismo geral subjacente ao aumento de contraste é a inibição lateral, que será exemplificada com um modelo simples. Na Figura (2.21–A) os neurônios TCR de um núcleo talâmico dorsal são denominados com letras de **a** a **g** e retransmitem a informação aos neurônios denominados com letras de **A** a **G**. O sinal de saída das células TCR é simplesmente o sinal de entrada pré-sináptico multiplicado por um fator de ganho igual a 1. Se a atividade do sinal que entra na célula **d** for 10, a atividade que sai da célula **D** também será 10. Essa forma simples de retransmissão não aumenta em nada a diferença entre o neurônio mais ativo, **d**, e os demais (Bear, et al., 2008).

Na situação da Figura (2.21–B), existem interneurônios inibitórios (neurônios TRN de núcleos talâmicos ventrais) que se projetam lateralmente para inibir cada uma das células vizinhas. O ganho sináptico das sinapses inibitórias é o fator multiplicativo -1 sobre o sinal de entrada, e o ganho das sinapses excitatórias é 3. Calculando o sinal de saída como a soma ponderada do ganho excitatório no caminho direto do relé sináptico e do ganho inibitório das células laterais vizinhas, pode-se perceber que existe um aumento significativo de contraste. A diferença da célula **d** em relação a suas vizinhas foi consideravelmente amplificada no sinal de saída da célula **D**.

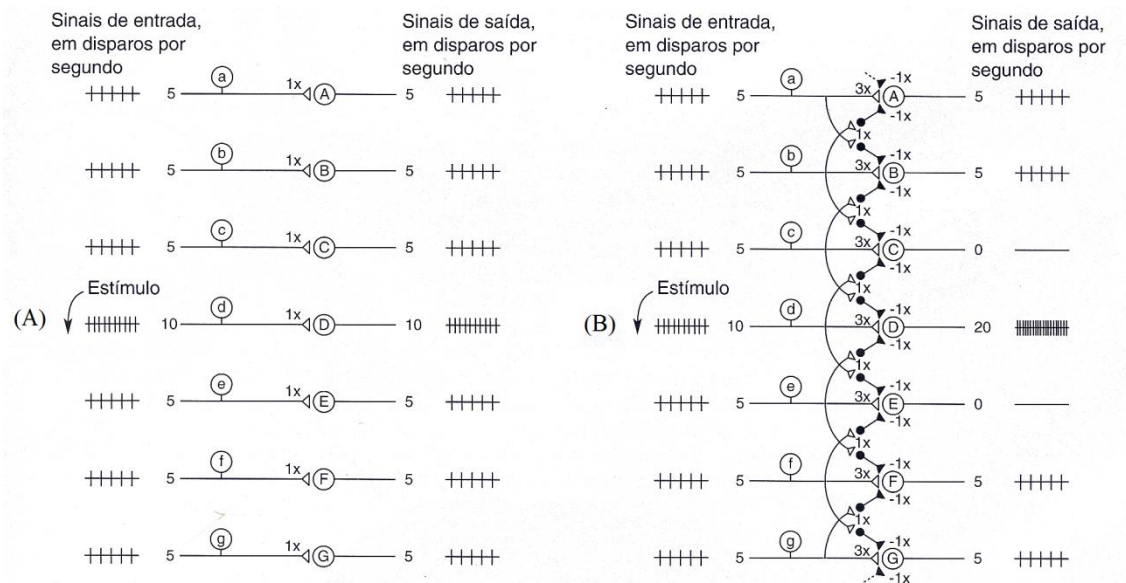


Figura 2.21 – Mecanismo da inibição lateral (adaptado de Bear, et al., 2008).

Em resumo, o tálamo possui mecanismos para modulação do sinal entrada que também formam intricados circuitos realimentados ou redes neurais, apresentando diferentes estados de sincronia, com oscilações em diferentes frequências. As diferentes faixas de frequências do padrão oscilatório do sinal de EEG estão relacionadas à ativação ou desativação desses diferentes circuitos neurais tálamo-corticais.

2.13 Circuitos neurais dos núcleos da base

Analisaremos nessa sessão os circuitos que estão envolvidos na atividade motora, interligando diferentes áreas do córtex motor. O cerebelo e os núcleos da base estão associados ao córtex motor para o controle dos movimentos motores. O cerebelo está relacionado aos movimentos musculares rápidos ou ocasionados por reflexo instintivo, enquanto os núcleos da base estão associados à duas importantes funções: ajudar o córtex a executar padrões de movimentos subconscientes mas já aprendidos e ajudar o planejamento paralelo múltiplo e os padrões de movimentos sequenciais que a mente deve analisar conjuntamente para realizar uma tarefa (Guyton & Hall, 2006). A essa ultima função estão associadas às tarefas mentais analisadas nessa dissertação.

Os núcleos da base constituem um acessório do sistema motor, que não funciona por si mesmo, mas em associação com o córtex cerebral e o sistema motor corticoespinal, interligado através do tálamo. Os núcleos da base recebem a maior parte de seus sinais de entrada do córtex cerebral e retorna quase todos seus sinais de saída

para o córtex cerebral. Em cada hemisfério cerebral os núcleos da base são formados pelo núcleo caudado, putâmen, globo pálido, núcleo subtalâmico e substância nigra²⁸ e estão localizados em torno do tálamo ocupando uma grande porção do interior de ambos os hemisférios cerebrais. A Figura 2.22 mostra as relações anatômicas dos núcleos da base com outras estruturas do cérebro, e pode-se notar que quase todas as fibras nervosas sensoriais conectando o córtex cerebral à medula espinhal se encontram dentro dos núcleos da base e do tálamo (Guyton & Hall, 2006).

O caudado e o putâmen em conjunto, são chamados de estriado, que é alvo da aferência cortical aos núcleos da base. O globo pálido é a origem das eferências ao tálamo (Figura 2.23). Conforme mencionado na sessão 2.4, os núcleos da base projetam uma aferência para o núcleo ventral lateral do tálamo (VL), chamada VLo. A aferência VLo é uma projeção dos axônios de VL para AMS, e por sua vez AMS está intensamente interconectada com M1 (Bear, et al., 2008). As outras estruturas participam de várias alças colaterais, que modulam a via direta,

Córtex (frontal, pré-frontal e parietal)→Estriado→Globo pálido→VLo→Córtex (AMS).

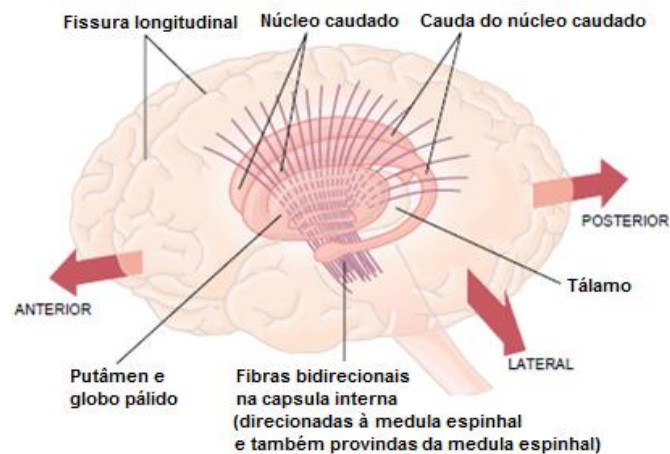


Figura 2.22 – Relações anatômicas entre os núcleos da base, o córtex cerebral e o tálamo (adaptado de Guyton & Hall, 2006).

²⁸ Do latim, “substância negra” (Bear, et al., 2008)

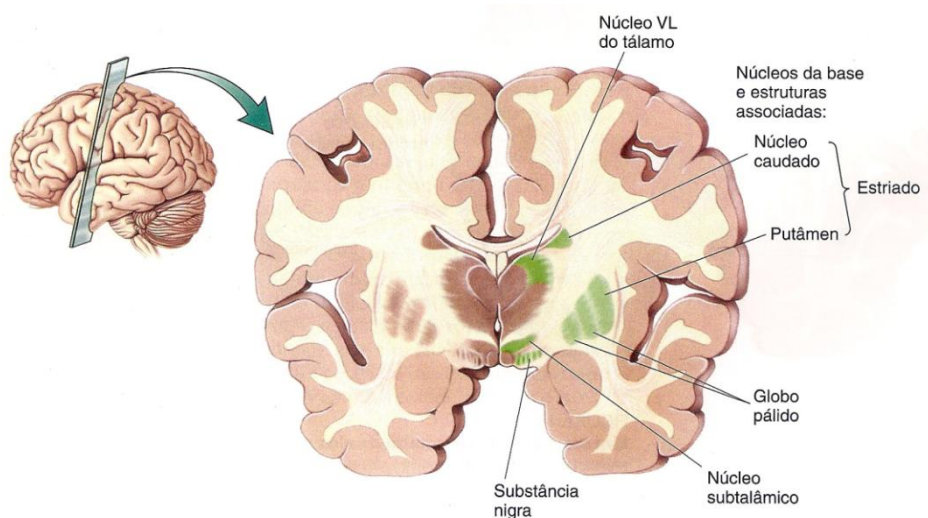


Figura 2.23 – Núcleos da base e estruturas associadas (Bear, et al., 2008).

2.14 A alça motora

A via mais direta na alça motora através dos núcleos da base se origina com uma conexão excitatória do córtex para células no putâmen. As células do putâmen estabelecem sinapses inibitórias em neurônios no globo pálido, que por sua vez, faz conexões inibitórias com as células do VLo. A conexão tálamo-cortical (do VLo até AMS) é excitatória, facilitando o disparo das células relacionadas a movimentos na AMS (Bear, et al., 2008). A alça motora direta está mostrada na Figura 2.24.

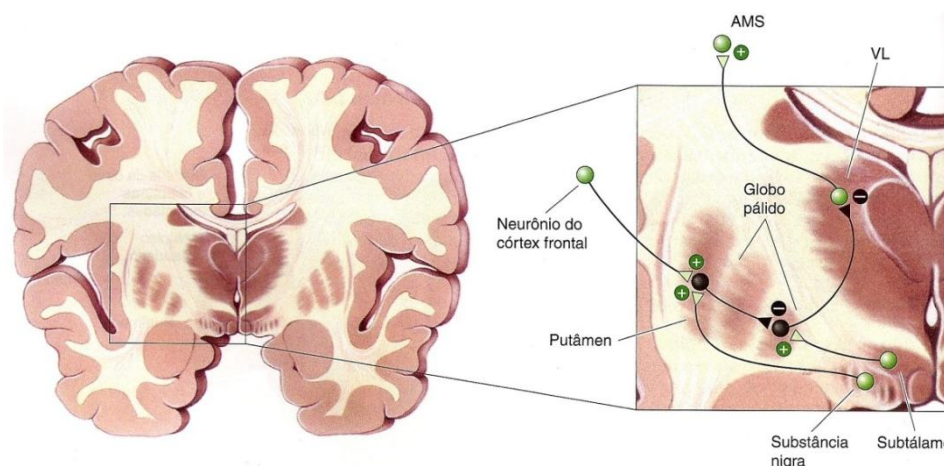


Figura 2.24 - Circuitos neuronais da alça motora. Sinapses marcadas com sinal (+) são excitatórias, enquanto sinapses marcadas com sinal (-) são inibitórias (Bear, et al., 2008).

A consequência funcional da ativação cortical do putâmen é a excitação da AMS pelo VL. Isso ocorre porque, no repouso, os neurônios no globo pálido estão ativos

espontaneamente e, portanto, inibem o VL. A ativação cortical (córtex frontal, pré-frontal e parietal) excita neurônios do putâmen, que inibem neurônios do globo pálido, os quais retiram a inibição das células de VLo, permitindo que se tornem ativas. A atividade no VLo impulsiona a atividade na AMS. Assim, essa parte do circuito atua como uma alça de retroalimentação positiva que pode servir para focalizar ou “afunilar” a ativação de áreas corticais espalhadas para a área motora suplementar do córtex. Supõe-se que o sinal que inicia uma atividade motora ocorre quando a ativação da AMS é impulsionada acima de algum limiar pela atividade que a atinge através desse “funil” dos núcleos da base (Bear, et al., 2008).

A área pré-motora e a área motora suplementar enviam aferências à camada cortical V do córtex motor primário. A camada cortical V de M1 é composta por grandes neurônios piramidais, que também recebem conexões das áreas 1, 2 e 3 do córtex somatossensorial e do tálamo. Então, os neurônios piramidais da camada V de M1 se projetam diretamente à medula compondo o tracto piramidal, e ao tronco encefálico.

A aferência direta do tálamo para M1 é originada principalmente por outra parte do núcleo ventro lateral do tálamo, chamada VLc. A aferência VLc retransmite informação do cerebelo. A informação que provém do cerebelo está relacionada ao aprendizado motor e movimentos balísticos. Os movimentos balísticos são movimentos tão rápidos que a retroalimentação não pode atuar para o controle do movimento. Nesses movimentos, o cerebelo se baseia em previsões baseadas na experiência, e compara o que se pretende com o que aconteceu, realizando o aprendizado.

O cerebelo possui um décimo do volume total do encéfalo, mas apresenta uma grande densidade de neurônios em seu córtex, possuindo mais de 50% do número total de neurônios do SNC. Para explicitar a importância do cerebelo, a via que conecta o cerebelo às outras partes do encéfalo possui 20 vezes mais axônios que o tracto piramidal (Bear, et al., 2008). A via que conecta o cerebelo à camada V de M1 forma outra importante alça motora, mas como os movimentos controlados pelo cerebelo não compreenderem a imaginação motora, nos limitaremos à análise da alça motora da via direta.

Em resumo, quando não está sendo realizada alguma tarefa mental motora, não existe envio de informação do córtex frontal, pré-frontal e parietal para putâmen. A inatividade dos circuitos de putâmen não inibe o globo pálido, que é espontaneamente ativo. Por sua vez, o globo pálido ativo provoca a inibição da aferência VLo. A

inatividade de VLo permite que AMS receba os sinais de marca-passo proveniente dos circuitos neuronais oscilatórios talâmicos. A AMS está conectada ao córtex motor primário (M1) através de aferências que se estendem a camada V de M1. Portanto, a influência do sinal de marca-passo do tálamo poderá ser verificada nos neurônios piramidais da camada V de M1, que apresentarão comportamento síncrono.

De forma contrária, durante a realização de uma tarefa mental de imaginação motora, a atividade cognitiva inicial que manifesta a intenção de realizar a tarefa se origina córtex frontal e se propaga para putâmen, através de conexões excitatórias. A atividade dos circuitos de putâmen inibem o globo pálido, e por sua vez, o globo pálido inativo não inibe a aferência VLo. A ativação de VLo envia sinais para áreas específicas de AMS. Cada neurônio de AMS, ou um grupo muito pequeno de neurônios estará envolvido em um aspecto diferente de uma tarefa cognitiva complexa, disparando rapidamente, mas não simultaneamente, ocasionando uma baixa sincronia. Da mesma forma os neurônios piramidais da camada V de M1 apresentarão comportamento dessincronizado, pois estão fortemente conectados aos neurônios de AMS.

Dessa forma já podemos elucidar um padrão que será descrito em detalhes no capítulo 3, quando não está sendo realizada alguma tarefa mental motora pode-se observar um comportamento sincronizado nos neurônios piramidais da camada V de M1, e de forma contrária, quando está sendo realizada alguma tarefa mental motora, observa-se um comportamento dessincronizado nos neurônios piramidais da camada V de M1.

Capítulo 3 : Transformada de Fourier e o sinal Eletroencefalográfico

Nesse capítulo será definida a Transformada de Fourier em janelas, utilizada na análise espectral do sinal de EEG, e a origem fisiológica do sinal de EEG. Também será estudada a forma como o padrão fisiológico apresentado durante tarefas mentais motoras, abordado no capítulo anterior, interfere no sinal de EEG.

3.1 Aplicação da Transformada de Fourier no sinal de EEG

A transformada de Fourier é uma operação matemática aplicada a funções não-periódicas que satisfaçam às condições de Dirichlet, resultando em espectros de amplitude e fase da função. O sinal eletroencefalográfico nada mais é do que uma sequência de medições do potencial elétrico cerebral obtidos há uma taxa de amostragem constante e registrados graficamente em um espaço cartesiano, onde um eixo representa a magnitude do potencial elétrico e o outro eixo representa a evolução temporal. Essa sequência de pontos pode ser aproximada por uma função não-periódica de forma que a Transformada de Fourier seja aplicada ao sinal de EEG (Figura 3.1).

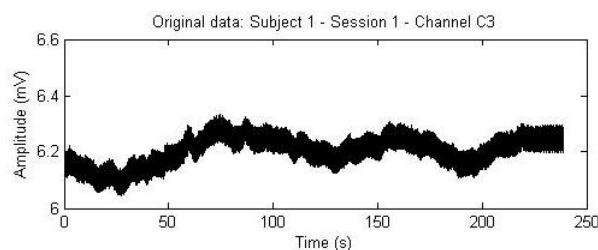


Figura 3.1 – Sinal de EEG.

Os padrões existentes no EEG durante a realização de uma tarefa mental não são visíveis em um único registro gráfico temporal do EEG. Aplicando as técnicas de filtragem e processamento de sinais citadas na introdução e a transformada de Fourier, pode-se observar esses padrões no espectro de amplitude do EEG.

O arcabouço teórico para o entendimento e demonstração da transformada de Fourier, envolvendo sequências numéricas, séries, séries de potências, teorema de Euler, série trigonométrica de Fourier e a série exponencial de Fourier podem ser encontrados

no apêndice B. De modo que, a transformada de Fourier pode ser aplicada em sinais não periódicos, como os sinais eletroencefalográficos (Figura 3.2). Através da transformada de Fourier o sinal de EEG é representado pela soma de infinitas senóides com frequências variando de forma contínua (vide apêndice B, sessão B.7).

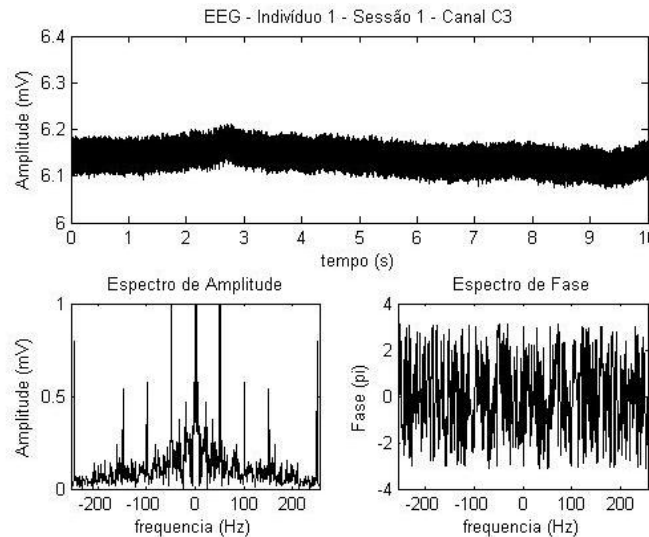


Figura 3.2 – Superior: Sinal de EEG; Inferior: Espectro de frequência do sinal de EEG (Informações sobre a origem desse sinal de EEG estão no capítulo 6, na descrição do banco de dados de EEG utilizado).

Durante a realização de uma tarefa mental, ocorrem padrões em uma determinada faixa de frequências do EEG, isto é, somente as senóides com frequências pertencentes a um determinado intervalo apresentarão o padrão. Assim, para que o padrão seja observado no domínio do tempo, é necessário filtrar o sinal em uma banda de frequências específica (Figura 3.3).

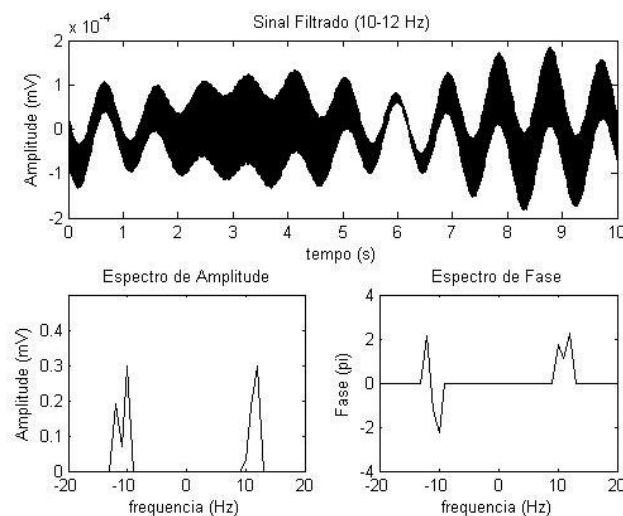


Figura 3.3 – Superior: Sinal de EEG filtrado entre 10-12 Hz; Inferior: Espectro de frequência do sinal de EEG filtrado.

3.2 Transformada de Fourier em janelas

A Transformada de Fourier (TF) é adequada para análise de sinais estacionários, pois sua aplicação implica na perda da informação temporal do sinal. No intuito de suprir essa deficiência, Gabor propôs em 1946 uma técnica chamada janelamento do sinal, que recebeu o nome de *Short Time Fourier Transform* (STFT) ou Transformada Gabor. Essa técnica consiste em aplicar a TF em pequenos trechos (janelas) considerados quase estacionários. A figura 3.4 ilustra a aplicação da STFT (Lopes, 2005).



Figura 3.4 – Aplicação da transformada Gabor.

A transformada Gabor é definida por,

$$STFT\{x(t)\} = X(\tau, w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot w(t - \tau) \cdot e^{-jw\tau} dt. \quad (3.1)$$

em que $x(t)$ é o sinal a ser transformado, $w(t)$ é uma função de janelamento, tipicamente são utilizadas janelas retangulares ou gaussianas, e τ é a fase utilizada para varredura em janelas do sinal.

Essa técnica é frequentemente aplicada em sinais de EEG, isto é, aplica-se a transformada de Fourier em pequenas janelas de sinal, de forma que o sinal eletroencefalográfico possa ser considerado ao menos estacionário no sentido amplo (Blanco, et al., 1995; Pardy, et al., 1996; Popivanov & Mineva, 1999). Posteriormente será discutida a origem dos padrões que surgem no EEG durante uma tarefa mental, por ora, basta dizer que os padrões estão relacionados às amplitudes dos coeficientes espectrais de uma faixa de frequências do espectro do EEG. Mais especificamente, são variações na energia do sinal filtrado, que podem ser observados no domínio do tempo, ou no domínio da frequência, observando às amplitudes dos coeficientes espectrais de uma faixa de frequências.

Os padrões, ou seja, as variações nas amplitudes dos coeficientes espectrais de uma faixa de frequências são decrementos e incrementos de energia que possuem duração máxima de 2 segundos. Dessa forma, para se monitorar a energia de uma faixa de frequências do EEG, são necessárias aplicações periódicas da transformada de Fourier em janelas relativamente pequenas de sinal. Para uma tarefa mental com duração de 10s, e aplicando a transformada de Fourier em janelas de 1s, obtém-se 10 espectros de frequência para análise. A observação dos espectros separadamente não é eficiente quando se aumenta muito o número de janelas (Figura 3.5), tampouco, a superposição dos gráficos permite um acompanhamento temporal sobre as variações de energia dos coeficientes espectrais (Figura 3.6).

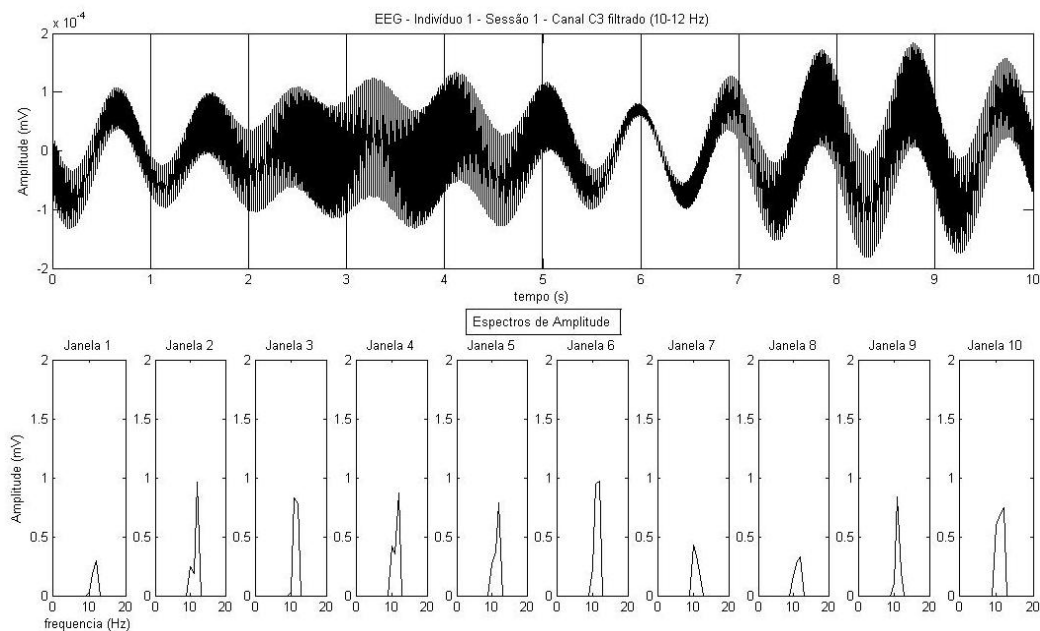


Figura 3.5 – Espectros de amplitude do sinal de EEG filtrado.

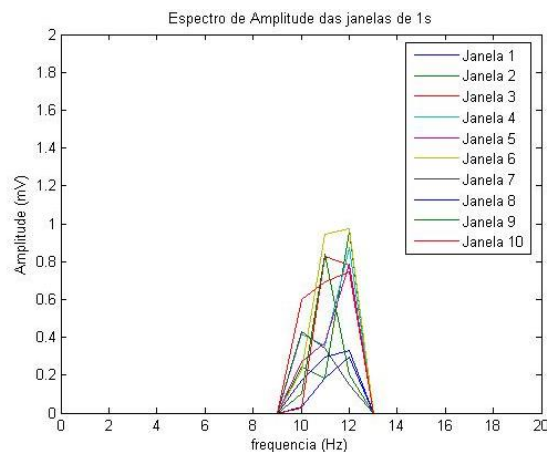


Figura 3.6 – Espectros de amplitude sobrepostos.

Dessa forma, é preferível visualizar os espectros de amplitude num espaço tridimensional, onde o eixo x representa o tempo, o eixo y representa a frequência e o eixo z representa a amplitude dos coeficientes espectrais. Os pontos relativos a cada amplitude espectral em cada frequência para cada janela de tempo são interpolados formando superfícies, e as superfícies possuem cores relativas à escala de amplitude. A Figura 3.7 (Esquerda) mostra o espectro do sinal de EEG. Esse espectro possui componentes em todas as componentes espectrais inferiores ao limite imposto pelo teorema de Nyquist. A Figura 3.7 (Direita) mostra o espectro do mesmo sinal de EEG, porém com todas as frequências fora da faixa de 10 a 12Hz anuladas, ou seja, filtrado o EEG filtrado na faixa de 10 a 12Hz. Nessa figura, podemos perceber a existência de um padrão, em que a energia do sinal diminui após quarto segundo, e alcança o valor mínimo no sexto segundo. Conforme veremos no próximo capítulo esse padrão, observado no eletrodo C3, corresponde à intenção de movimento da mão direita e pode servir para o controle de uma ICC.

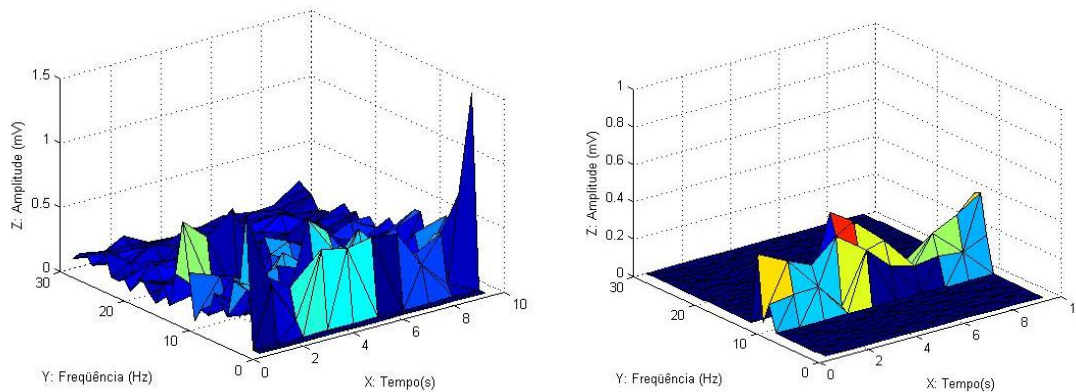


Figura 3.7 – Esquerda: Espectro de amplitude; Direita: Espectro de amplitude do sinal filtrado entre 10 e 12 Hz.

3.3 Sinal Eletroencefalográfico

O eletroencefalograma é o registro da atividade elétrica de uma grande população de neurônios do córtex cerebral, medido sobre a superfície do escalpo através de eletrodos. O método mais usual é o não-invasivo, porém a atividade neuronal pode ser obtida com a introdução do eletrodo no interior do tecido cerebral (registro de profundidade) ou colocando eletrodos na superfície exposta do cérebro, este chamado de eletrocortigrama (ECoG) (Geisinger, 2005).

O registro de EEG é relativamente simples: cerca de duas dúzias de eletrodos são fixados em posições padrão sobre o escalpo, e conectados a canais amplificadores e sistemas de registros. Pequenas flutuações de voltagem, usualmente umas poucas dezenas de microvolts (μV) de amplitude, são medidas entre pares selecionados de eletrodos. Um registro de EEG típico (Figura 3.8) é um conjunto de muitos traçados irregulares simultâneos, indicando alterações de voltagem entre pares de eletrodos devidamente aterrados. O eletrodo de aterramento fornece um referencial para as flutuações diferenciais medidas entre os canais, sendo normalmente posicionado no osso frontal para minimizar o ruído de origem muscular. Cada sinal de saída no amplificador comanda uma caneta de registro ou é armazenado na memória do computador (Bear, et al., 2008).

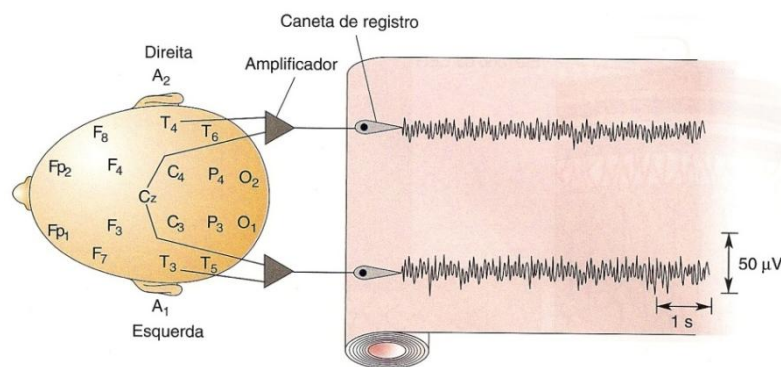


Figura 3.8 - Registro típico de EEG (adaptado de (Bear, et al., 2008).

3.4 Posicionamento dos eletrodos

Em 1958 Herbet Jasper sugeriu um sistema que passou a ser mundialmente utilizado, chamado “Sistema Internacional de Posicionamento de Eletrodos 10-20”. Este sistema é baseado nas subdivisões do cérebro que é dividido em hemisférios e lobos. Nesse sistema os eletrodos são denominados por uma letra maiúscula, correspondente à inicial do lobo cerebral onde estão colocados, seguido de um número par, se o hemisfério for direito, ou ímpar, caso seja esquerdo.

Para eletrodos colocados na distância média entre o nariz e o ínio é utilizada a letra “C”, que indica região central, e para eletrodos colocados nos auriculares (orelhas), a letra “A”. Já os eletrodos posicionados no lobo frontal, mais próximo do nariz, são acrescidos da letra minúscula “p”. E na linha imaginária que liga o nariz ao ínio, em vez

de número, é usada a letra minúscula “z”, indicando a divisão central dos hemisférios do encéfalo (Sala, 2005). As Figuras 3.9 e 3.10 mostram o posicionamento dos eletrodos no escalpo de acordo com o sistema internacional.

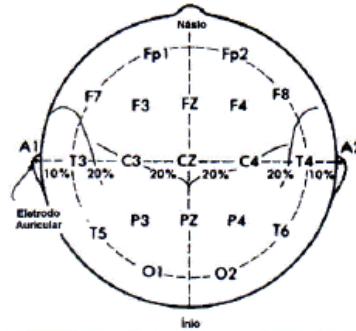


Figura 3.9 – Sistema Internacional de Posicionamento de Eletrodos 10-20 (Sala, 2005).

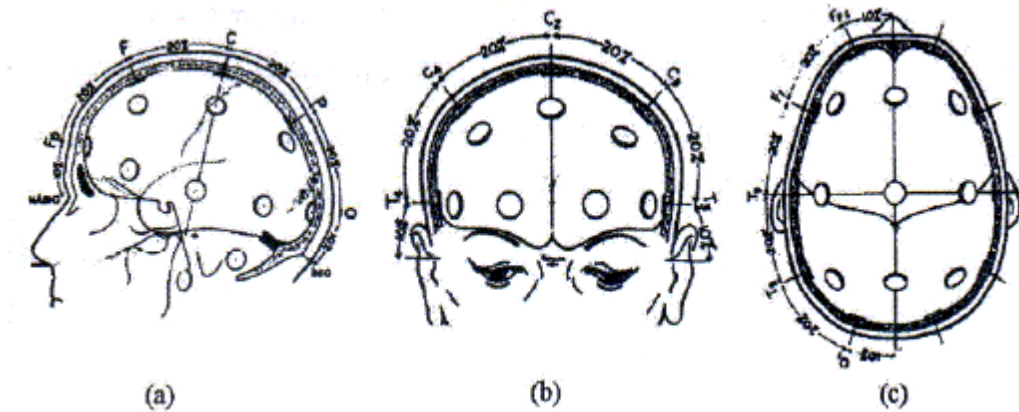


Figura 3.10 – Sistema Internacional de Posicionamento de Eletrodos 10-20. (a) Visão temporal. (b) Visão frontal. (c) visão parietal (Sala, 2005).

Existem três formas distintas de derivações dos eletrodos para formação dos canais: método bipolar, método unipolar (ou de eletrodo/referência comum) e o método de referência média (Figura 3.11). Na Figura 3.11 (a) é apresentado o método bipolar, em que cada canal é captado a partir de dois eletrodos, sendo que a tensão é igual à diferença de potencial entre os eletrodos. A Figura 3.11 (b) mostra o método unipolar que possui um eletrodo de referência comum a todos os canais, em que a tensão medida será a diferença entre qualquer eletrodo e o de referência. O método de referência média (Figura 3.11 (c)) também tem um eletrodo de referência, mas este é resultante do potencial médio de todos os demais, o que significa que a tensão de um canal é a diferença entre o potencial de um eletrodo e o potencial médio entre todos os eletrodos (Sala, 2005).

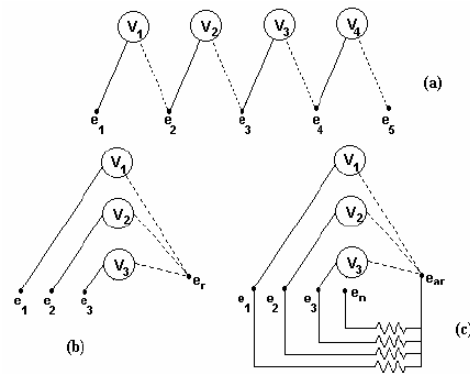


Figura 3.11 – (a) Método bipolar de ligação de eletrodos. (b) Método unipolar de ligação de eletrodos. (c) Referência média comum (Sala, 2005).

3.5 Fisiologia do sinal eletroencefalográfico

O EEG registra principalmente as correntes extracelulares que surgem como consequência da atividade sináptica nos dendritos de neurônios piramidais do córtex cerebral (Figura 3.12). Os campos elétricos extra-celulares são gerados principalmente pelo potencial pós-sináptico (PPS), que podem ser excitatórios (PEPS) ou inibitórios (PIPS). Os efeitos dos potenciais de ação não são levados em conta para a formação das correntes extracelulares porque possuem curta duração, pois se propagam rapidamente em saltos pelo axônio, e porque só há interação do potencial do axônio com o meio extracelular nos nódulos de Ranvier (Lopes, 2005).

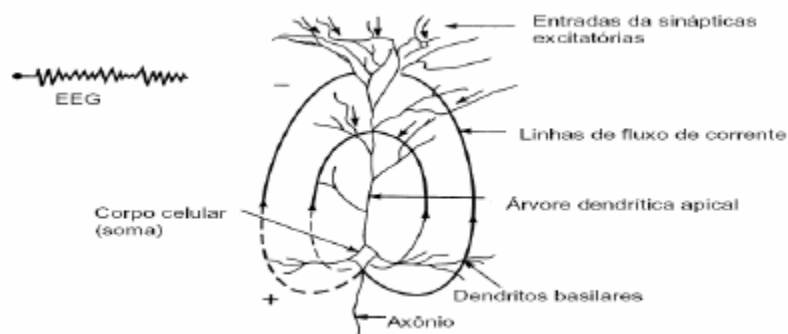


Figura 3.12 – Correntes sinápticas extracelulares (Lopes, 2005).

Os campos elétricos extracelulares gerados pelos neurônios são atenuados e espalhados ao atravessarem o crânio em direção ao escalpo, devida a baixa condutividade elétrica do crânio. A distribuição superficial dos campos elétricos é ainda distorcida pela variação de condutividade e espessura do crânio de local para local (Trindade, 2005). Dessa forma, o campo elétrico medido no eletrodo depende dos

valores de condutividade dos tecidos de revestimento do cérebro (meninges, crânio e pele) e do crânio (Estébanez, 2003).

Como foi mencionado na sessão 2.9, os neurônios do córtex estão distribuídos em seis camadas paralelas à superfície. Estes neurônios são de dois tipos: piramidais (camadas III e V) e não piramidais (camadas I, II, IV e VI) (Lopes, 2005). As células não piramidais e as células gliais (Figura 2.14) possuem simetria esférica, não tendo um sentido definido de propagação do sinal elétrico. Por consequência dessa simetria o campo eletromagnético produzido tem resultante nula. Já no caso das células piramidais, devido ao grande prolongamento de seus axônios, é possível identificar um campo eletromagnético resultante segundo uma distribuição bipolar (Figura 2.15 - Direita) (Araújo, et al., 2004). Então, as células piramidais da camada V são as que mais contribuem para os sinais elétricos registrados no EEG.

A Figura 3.13 mostra a geração dos campos elétricos extracelulares. Primeiramente, o axônio do neurônio piramidal aferente dispara um potencial de ação que é conduzido até os dendritos, estimulando os terminais pré-sinápticos a liberarem o neurotransmissor glutamato nas fendas sinápticas. A liberação de glutamato envolve a ativação de canais de cátions. A abertura dos canais de cátions permite o fluxo de íons para dentro do dendrito que ocasionam uma corrente iônica positiva para dentro do dendrito, deixando uma pequena negatividade no fluído extracelular. A corrente se difunde pelo dendrito e escapa de suas partes mais profundas, deixando o fluído levemente positivo naqueles locais (Bear, et al., 2008).

O eletrodo de EEG, que forma um par com um segundo eletrodo, mede esse padrão através de espessas camadas de tecidos. Somente com a contribuição das pequenas voltagens de milhares de células ativadas conjuntamente é que o sinal pode ser suficientemente intenso para ser detectado na superfície do escalpo. Essa população de neurônios recebe o nome de massa neural e consiste de 10^4 a 10^7 neurônios (Azevedo, 2005). A ativação conjunta dos neurônios de uma massa neural recebe o nome de sincronismo. Se a excitação sincrônica desse grupo de células for repetida várias vezes, o EEG consistirá de grandes ondas rítmicas (Bear, et al., 2008).

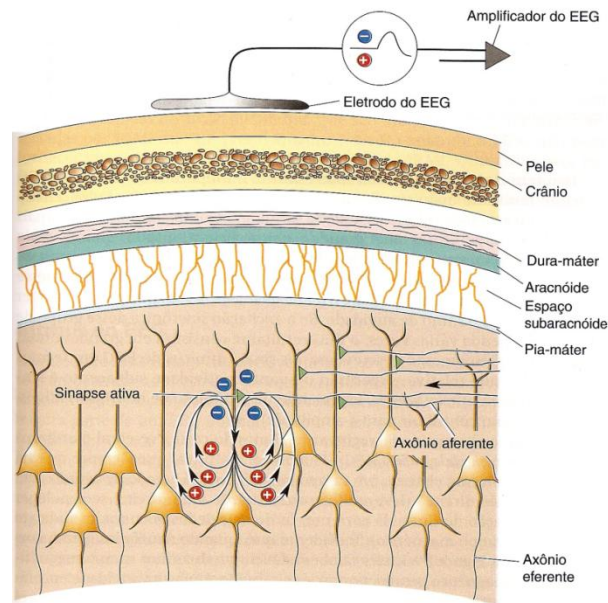


Figura 3.13 – Atenuação do campo elétrico gerado por correntes sinápticas extracelulares de células piramidais (Bear, et al., 2008).

A Figura 3.14 mostra a geração de grandes sinais de EEG pela atividade sincrônica. Na figura 3.14 (a) cada neurônio da população de células piramidais sob um eletrodo de EEG recebe muitas aferências sinápticas. Na figura 3.14 (b) as aferências disparam em intervalos irregulares e a atividade somada detectada pelo eletrodo tem amplitude pequena. Na figura 3.14 (c) as aferências disparam em uma estreita janela de tempo, de modo que as respostas das células piramidais são sincrônicas, e a amplitude do EEG resultante é muito maior (Bear, et al., 2008).

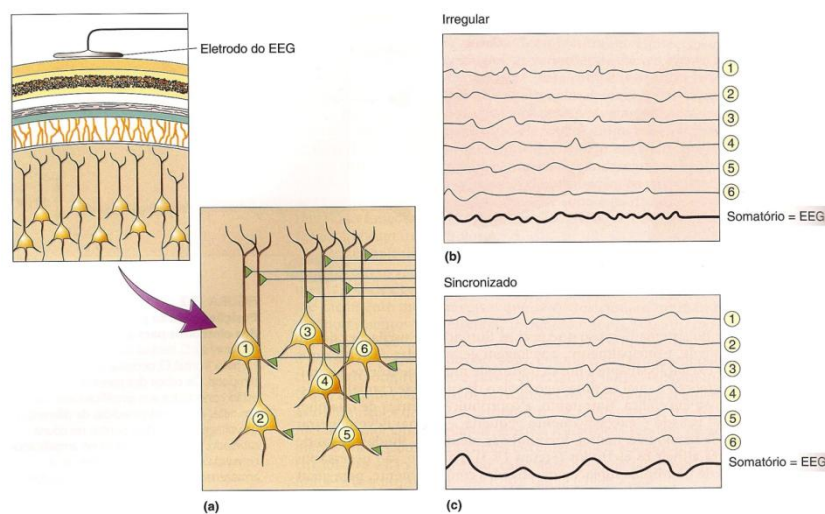


Figura 3.14 – (a) Neurônios piramidais da camada V do córtex cerebral. (b) Atividade neuronal dessincronizada (c) Atividade neuronal sincronizada (Bear, et al., 2008).

3.6 Artefatos

O sinal de EEG é facilmente corrompido por outros sinais elétricos, devido a sua pequena amplitude. Os ruídos não desejados são chamados de artefatos, e pertencem a duas categorias: artefatos de origem técnica e artefatos de origem fisiológica (Azevedo, 2005). Artefatos de origem técnica ocorrem devido à interferência elétrica externa ou ao mau funcionamento do aparelho de registro do EEG (eletrodos, cabos, amplificador, filtros). Os principais artefatos são:

- i. Artefatos de linha: são ocasionados pela interferência magnética de fontes de tensão AC. Esse artefato apresenta frequência típica de 50 ou 60 Hz, e pode ser removido com a utilização de filtros devidamente ajustados, sem que ocorra perda significativa na informação presente no sinal de EEG. Alternativamente, podem ser utilizados fios curtos entre o eletrodo e o amplificador, ou realizar as medições numa sala blindada. A Figura 3.15 reproduz o espectro de frequências da figura 3.2 mostrando o artefato de linha presente na componente de 50 Hz.

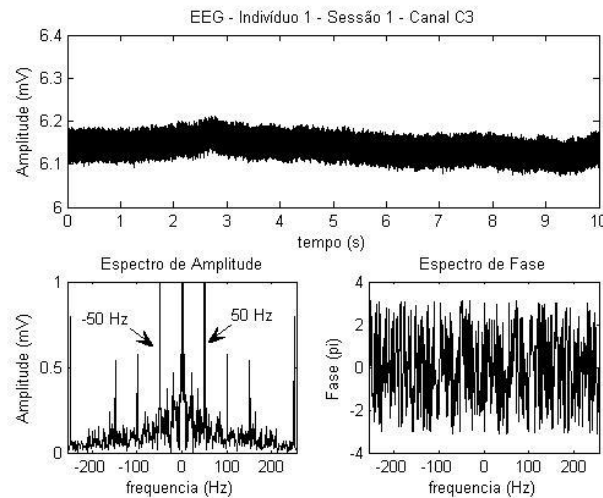


Figura 3.15 – Sinal de EEG com interferência de linha (Informações sobre a origem desse sinal de EEG estão no capítulo 6, na descrição do banco de dados de EEG utilizado).

- ii. Flutuações na impedância do eletrodo: os eletrodos são fixados no escalpo por meio de uma pasta eletrolítica condutora. Essa pasta tem a finalidade de diminuir a impedância de contato. Os artefatos devido a flutuações na impedância do eletrodo geralmente são ocasionados pela má fixação dos eletrodos e pela sudorese. As junções pele-eletrólito e eletrólito-eletrodo provocam um potencial com nível DC no eletrodo. Esse nível DC atinge valores

de 0,1 a 1,7V, que são muito maiores que o sinal de EEG, portanto é necessária a utilização de filtros passa alta na entrada dos amplificadores (Lopes, 2005).

Os artefatos de origem fisiológica são originados pela interferência do sinal eletroencefalográfico com outros sinais biológicos, dentre eles:

- i. Artefato de movimento ocular: O sinal elétrico referente ao movimento ocular (eletroculograma - EOG) é o ruído predominante na gravação da atividade elétrica cerebral. Geralmente é solicitado ao paciente que não mova os olhos e nem pisque durante a aquisição do sinal (Figura 3.16).
- ii. Artefato de movimento muscular: O sinal elétrico referente à contração muscular (eletromiograma - EMG), particularmente movimentos da cabeça e do pescoço, interferem no sinal de EEG.
- iii. Artefato de Eletrocardiograma: A atividade elétrica cardíaca (ECG) pode ser registrada sobre o escalpo. Geralmente ela é minimizada durante a gravação do EEG utilizando-se referências que também possuam o mesmo ruído.

A Figura 3.16 mostra os artefatos de piscadas de olho em um EEG normal de um indivíduo acordado e em repouso. Aproximadamente na metade do traçado do registro (5-6 s), o sujeito abriu os olhos e verifica-se que os artefatos musculares afetam consideravelmente os eletrodos frontais, por estarem mais próximos. Nos eletrodos occipitais o ritmo alfa de grande amplitude está presente enquanto o indivíduo permanece de olhos fechados, sendo suprimido pelo ritmo beta de pequena amplitude quando os olhos são abertos (Bear, et al., 2008).

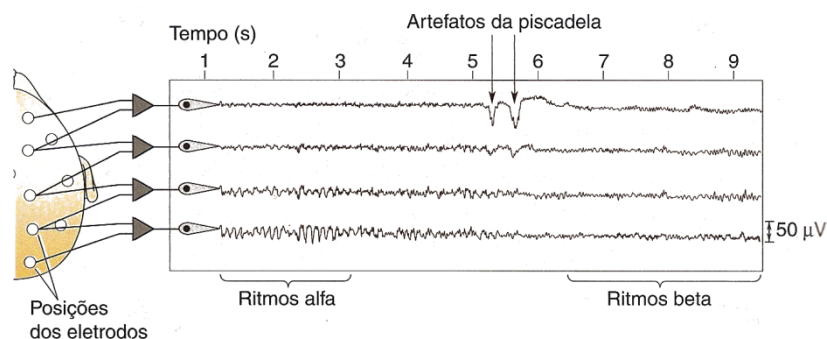


Figura 3.16 – Artefatos de piscadas de olho em um EEG normal (Bear, et al., 2008).

Além, da interferência dos sinais externos ao cérebro, o sinal elétrico medido diretamente sobre o córtex (eletrocortigrama - ECoG) sofre interferência de sinais gerados em áreas corticais vizinhas, e o sinal medido no escalpo (EEG) é uma mistura de sinais corticais atenuados e espalhados pelo crânio e couro cabeludo. Então, um sinal de EEG medido por um eletrodo sob o lobo parietal, também contém sinais do lobo frontal, temporal e occipital. Ao contrário, um sinal de EEG medido sob o lobo occipital, contém menos interferência de sinais do lobo frontal, temporal, pois se encontra em uma posição mais afastada (Figura 2.3 - Direita).

3.7 Oscilações tálamo-corticais

O sinal de EEG apresenta características específicas em bandas definidas de frequência. É conhecido que a realização de algumas atividades, como o sono, a visão e a execução de tarefas motoras está relacionada à bandas específicas de frequência. As principais bandas de frequência são denominadas por letras gregas: δ , θ , α , β e μ . Cada banda é observada em um local e circunstância específica, como por exemplo, δ é observada no lobo frontal durante o sono profundo, α é observada no lobo occipital quando os olhos estão fechados e μ é observada no córtex motor durante a realização de uma atividade motora.

Uma dada banda de frequência pode ser induzida, bloqueada ou alterada em ocasião de uma tarefa mental (Pfurtscheller & Lopes, 1999), dessa forma, uma análise das principais propriedades das bandas de frequências do sinal EEG e da sua origem servirá de base para a criação de um modelo cerebral, em que tentaremos explicar a origem da atividade oscilatória e a interferência que ocorre entre as áreas cerebrais, muitas vezes ocultando o padrão a ser observado na banda de frequências. As atividades oscilatórias (Figura 3.18) normais são classificadas em:

- i. Infra-lenta: 0,02-0,1 Hz;
- ii. Lenta: 0,1-15 Hz;
- iii. Rápida: 20-60 Hz;
- iv. Ultra-rápida: 100-600 Hz.

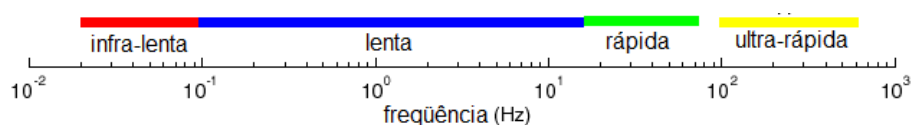


Figura 3.17 – Abrangência do espectro de frequências do EEG (adaptado de Scholarpedia, 2009).

Cada tipo de oscilação é gerada por um determinado conjunto de correntes neuronais intrínsecas, interações sinápticas e fatores extracelulares. As características mais importantes do EEG estão compreendidas nas de frequências que se estendem até 30Hz, e essa faixa de frequências é subdividida em grupos ou ritmos (δ , θ , α , β e μ) relacionados à localização de medição e à banda de frequências, como mostra a tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Relação de frequências ocorridas no cérebro humano (Cheeín, 2005).

Banda	Frequência (Hz)	Amplitude (μV)	Localização (lóbulos)
Delta (δ)	1 - 4	< 100	Variável
Teta (θ)	4 - 8	< 100	Variável
Alfa (α)	8 - 12	20 - 60	Occipital
Beta (β)	14 - 30	20 - 30	Frontal e Parietal
Mu (μ)	10 - 12	< 50	Frontal e Parietal

Abaixo descrevemos os estados mentais associados às bandas de frequências:

Ritmo α : A Federação Internacional de Eletroencefalografia e Neurofisiologia clínica define: “Ritmo entre 8 e 12 Hz ocorrendo em pessoas acordadas sobre as regiões posteriores do cérebro, geralmente maior voltagem sobre as áreas occipitais. A amplitude é variável mas é quase sempre abaixo de 50 μV em adultos. É melhor visto com os olhos fechados e sob condições de relaxamento físico e inatividade mental. É bloqueado ou atenuado por atenção, principalmente visual, e esforço mental.”.

Ritmo β : atividade de maior frequência (14 – 30 Hz) com menor amplitude, causada geralmente pela abertura dos olhos, estando em estado de vigília, ou no sono REM (sono de movimento rápido dos olhos). É bloqueado por atividade motora e estimulação tátil.

Ritmo θ : sinal com relativo aumento na amplitude, considerando os ritmos alfa e beta, atividades mais lentas (4 – 8 Hz). É encontrado sobre a região frontal quando a pessoa realiza atividades mentais tais como a solução de problemas e na região temporal e parietal durante emoções de stress despontamento e frustração.

Ritmo δ : ritmos lentos de amplitude variável com frequência inferior a 4 Hz, registrados em indivíduos no estágio de sono profundo, podendo aparecer em ocasiões de alguns estados patológicos (Guyton & Hall, 2006).

Ritmo μ : É um ritmo associado às atividades motoras e melhor adquirido sobre o córtex motor. O Ritmo μ diminui com o movimento ou a intenção de se mover. Apesar da frequência e a amplitude do Ritmo μ serem similar ao Ritmo α , o Ritmo μ é topograficamente e fisiologicamente diferente do Ritmo α , principalmente porque este último é gravado sobre a área occipital do córtex (Estébanez, 2003; Azevedo, 2005).

A figura 3.18 mostra os ritmos cerebrais descritos acima e a atenuação do ritmo α enquanto os olhos estão abertos. A substituição do ritmo alfa por um ritmo beta assíncrono de pequena amplitude, quando os olhos estão abertos, pode ser observada nas figuras 3.16 e 3.18.

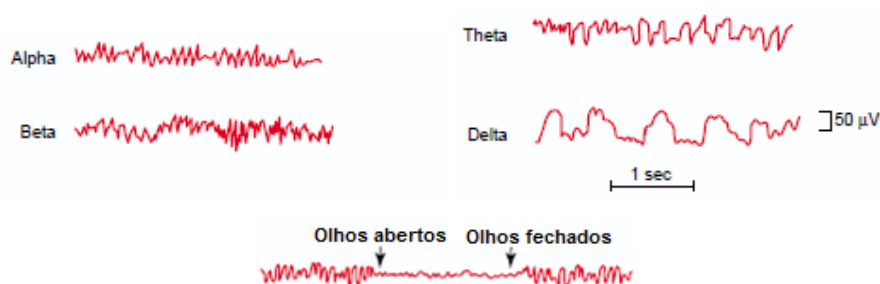


Figura 3.18 – Ritmos cerebrais α , β , θ e δ . Em baixo é mostrada a substituição do ritmo α por um ritmo β (adaptado de Guyton & Hall, 2006).

Em geral, ritmos de baixa amplitude e alta frequência estão associados à vigília e estado de alerta ou aos estágios do sono em que ocorrem os sonhos. Ritmos de amplitude elevada e baixa frequência estão associados aos estágios de sono sem sonhos e ao estado patológico de coma. Isso é lógico, pois quando o córtex está mais ativamente envolvido no processamento de informações, sejam essas geradas por aferências sensoriais, sejam por processos internos, o nível de atividade dos neurônios corticais está relativamente alto, mas também dessincronizado. Cada neurônio, ou um grupo muito pequeno de neurônios está fortemente envolvido em um aspecto um pouco diferente de uma tarefa cognitiva complexa, disparando rapidamente, mas não simultaneamente, à maioria de seus neurônios vizinhos. Isso leva a uma baixa sincronia, e assim, a amplitude do EEG é baixa e predominam as ondas β (Bear, et al., 2008).

Ao contrário durante o sono profundo, os neurônios corticais não estão ocupados com o processamento de informação, e a maior deles está excitada de maneira fásica, por uma aferência rítmica e lenta, igual para todos. Esse sinal rítmico ou marca-passo é originado nos circuitos neuronais oscilatórios do tálamo, que se impõe nos neurônios do

córtex. Nesse caso a sincronia é alta, e, portanto, a amplitude do EEG também é alta (Bear, et al., 2008).

3.8 Registros de EEG

Podem ser obtidos diversos tipos de registros de sinais de EEG, cada qual tem a função de mostrar o comportamento elétrico do cérebro em diferentes atividades. Os potenciais espontâneos não são produzidos por estimulação sensorial. São componentes básicos do sinal de EEG e podem se apresentar em toda a faixa de frequências compreendida pelo sinal de EEG. O potencial relacionado a evento (do inglês, *Event-Related Potential - ERP*) é a mudança do potencial eletroencefalográfico em resposta a um evento em particular. Normalmente, o sinal de EEG é gravado referenciado ao evento, ou seja, a origem do tempo é considerada como o instante de ocorrência do evento. Assim, o tempo de gravação anterior ao evento é considerado negativo e o tempo posterior, positivo (Delamonica, 1984).

O ERP possui amplitude muito menor do que a atividade espontânea do EEG, de forma que não pode ser reconhecido no sinal de EEG bruto, mas a relação sinal-ruído do EEG pode ser melhorada utilizando a média de várias gravações de EEG repetidas com as mesmas circunstâncias. Portanto, técnicas de análise de média são comumente empregadas para a detecção do ERP. Na análise de média, considera-se que o ERP ocorre com um atraso aproximadamente constante em relação ao evento e a atividade espontânea do EEG é modelada como um ruído aleatório aditivo (Figura 3.19) (Rugg & Coles, 1996).

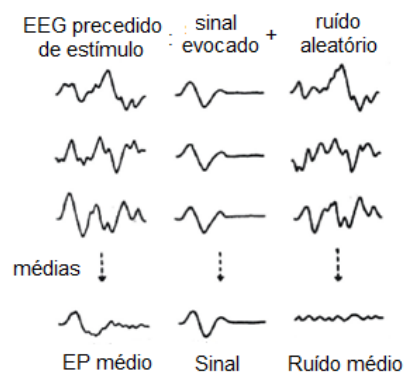


Figura 3.19 – Detecção do ERP através da média das gravações de EEG (adaptado de Rugg & Coles, 1996).

Quando o evento é um estímulo físico externo, como um estímulo elétrico em um nervo, um estímulo visual ou um estímulo auditivo, o ERP é chamado de potencial evocado (do inglês, *Evoked Potential* - EP). Os potenciais evocados são medidos em áreas distintas do cérebro mediante a imposição do estímulo físico. Dependendo da modalidade que se pretende estudar, o estímulo pode ser somatosensitivo, visual ou auditivo e possui utilidade clínica importante na detecção de doenças neurais degenerativas e patologias traumáticas (Delamonica, 1984).

Quando se estimulam certos núcleos do tálamo, pode-se tomar potenciais evocados apenas em certas áreas específicas do córtex, relacionadas com funções específicas. Estes núcleos são denominados núcleos talâmicos específicos. Entre eles temos, por exemplo, o núcleo ventral pósterio-lateral e o núcleo geniculado medial (NGM) (Figura 2.8), cuja estimulação evoca potenciais, respectivamente, na área somatossensorial e na área auditiva do córtex (Machado, 2007).

Os potenciais evocados são observados através de médias de centenas de gravações de EEG realizadas com o mesmo tipo de estímulo, com o intuito de anular o efeito do ruído aleatório e acentuar a resposta ao estímulo. Dessa forma, fica evidente no registro médio do sinal de EEG um padrão temporal relacionado ao evento. A Figura 3.20 mostra um potencial evocado somatosensitivo normal, em que o primeiro potencial positivo de alta voltagem, na latência de 10ms, corresponde ao potencial de ação do nervo estimulado. Os números indicam as latências em milissegundos. O número no somatório indica que o potencial da figura é o resultado da média de 512 gravações de EEG (Delamonica, 1984).

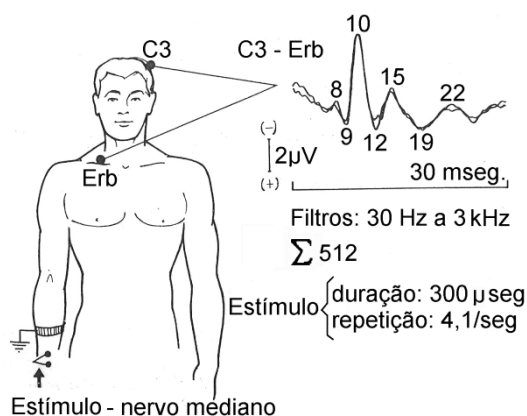


Figura 3.20 – Potencial evocado somatosensitivo normal (adaptado de Delamonica, 1984).

O ERP também pode ser detectado na ausência de um estímulo sensorial, sendo produzido como resposta a uma intenção. Nesse conjunto estão os potenciais relacionados a movimentos (do inglês, *Movement-Related Potencial - MRP*), que são potenciais da ordem de $1\mu V$, gerado como resposta a uma intenção mental de realizar o movimento de um membro, e medido no córtex motor (Azevedo, 2005). O MRP representa o caso abordado nessa dissertação, que também utiliza intenções de movimento das mãos, portanto será descrito em mais detalhes.

Alguns eventos, não podem ser observados através de uma simples técnica linear como a média, pois a suposição de que o ERP é um sinal adicionado a um ruído aleatório não é verdadeira para todos os casos. De forma que alguns ERPs específicos, como o MRP, somente são detectados por análise de frequência. Isto significa que esses ERPs representam, em termos gerais, o decremento ou incremento de energia de determinadas bandas de frequência. O decremento de energia de uma determinada banda de frequência é chamado dessincronização relacionada a evento (event-related dessynchronization - ERD) enquanto o caso oposto é chamado sincronização relacionada a evento (event-related synchronization - ERS) (Pfurtscheller & Lopes, 1999).

3.9 ERD/ERS

Como dito anteriormente, o EEG mede a atividade de massas neurais trabalhando em sincronia. Normalmente, quando uma população de neurônios piramidais do córtex está inativa, os neurônios recebem uma aferência rítmica do tálamo que os mantêm sincronizados, assim, a resultante da soma desses sinais rítmicos possui grande amplitude. Quando uma massa neural é ativada por um estímulo ou uma intenção, os neurônios piramidais do córtex recebem sinais distintos e específicos através da aferência do tálamo, perdendo a sincronia, e a resultante da soma desses sinais possui amplitude menor o que ocasiona um ERD (Bear, et al., 2008).

O ERP, de forma geral, é considerado como resultado de séries de respostas pós-sinápticas transientes, principalmente dos neurônios piramidais da camada V do córtex cerebral ativados por um estímulo específico. Em contraste, o ERD/ERS é gerado por mudanças em um ou mais parâmetros que controlam as oscilações em redes neuronais (Pfurtscheller & Lopes, 1999).

A Figura 3.21 mostra um ERD/ERS de um ERP utilizando estímulo visual. O padrão ERD/ERS é obtido no sinal de EEG dos eletrodos O1 e O2 que são filtrados na banda α . Quando os olhos estão abertos, os sinais visuais sensibilizam células fotossensíveis na retina que enviam a informação pelo nervo óptico para uma área no tálamo chamada de núcleo geniculado lateral²⁹ (NGL) ou corpo geniculado lateral (CGL). O NGL, então, modula e transmite a informação visual para o córtex visual (V1) (Figura 3.22) (Guyton & Hall, 2006).

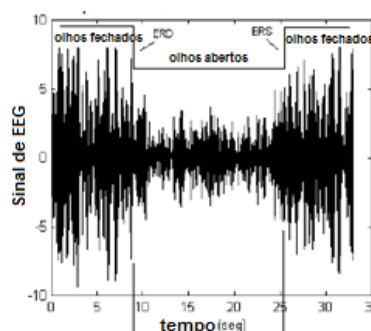


Figura 3.21 – ERD/ERS no sinal de EEG capturado no lobo occipital (adaptado de Cheeín, 2005).

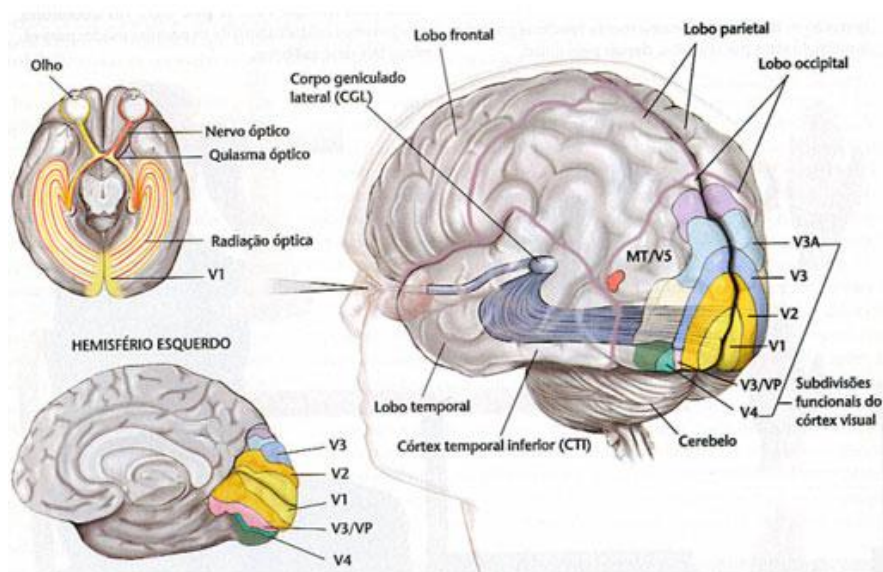


Figura 3.22 – Caminho percorrido pela informação visual até o córtex visual.

A Figura 3.23 mostra um diagrama do circuito do NGL, ou LGN, do inglês (Lateral Geniculate Nucleus). As entradas das células relé são mostradas com seus

²⁹ Os núcleos geniculados laterais são formados por 6 camadas de células sobrepostas que se curvam ao redor do tracto óptico, como a articulação de um joelho. Desse fato deriva o nome “geniculado”, do latim *geniculatus*, que significa “como um pequeno joelho” (Bear, et al., 2008).

respectivos neurotransmissores e receptores pós-sinápticos, que são classificados em ionotrópicos³⁰ e metabotrópicos³¹ (vide apêndice A, sessão A.6). Em cima estão representadas a camada IV e a camada VI do córtex visual cujos neurônios utilizam o neurotransmissor glutamato (Glu). Abaixo está o núcleo talâmico reticulado (TRN) cujos neurônios utilizam o neurotransmissor GABA. As células de restabelecimento, ou células relé, utilizam o neurotransmissor glutamato. Os interneurônios utilizam o neurotransmissor GABA. Em azul está representada a formação reticular do tronco cerebral (do inglês, Brainstem Reticular Formation - BRF) cujos neurônios utilizam o neurotransmissor acetilcolina (ACh) (Scholarpedia, 2009).

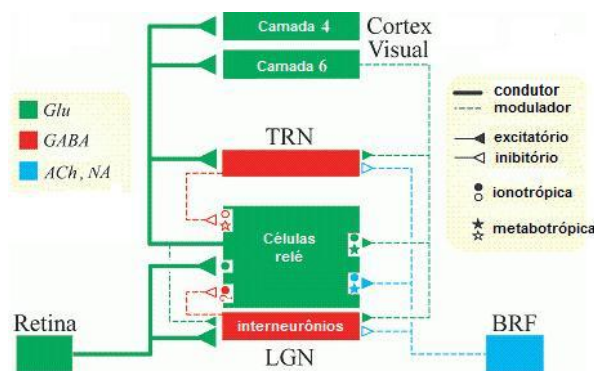


Figura 3.23 – Circuito tálamo-cortical para o processamento de informação visual (adaptado de Scholarpedia, 2009).

Podemos observar que os interneurônios gabaérgicos do núcleo geniculado lateral (LGN) formam uma via de axônios modulatórios (vide capítulo 2, sessão 2.12) com sinapses inibitórias nas células relé. As células relé estão localizadas no tálamo dorsal, que por sua vez pertence ao grupo lateral. O tálamo dorsal envia de volta ao núcleo geniculado lateral uma via de axônios modulatórios, que fazem sinapses excitatórias com os interneurônios do LGN.

Esse circuito excitatório-inibitório de vias modulatórias pode ser responsável por um sinal oscilatório no tálamo dorsal, como foi abordado na sessão 2.11.2. As células relé formam uma via condutora, isto é uma via de conexões diretas, de sinapses excitatórias com as camadas IV e VI de V1, portanto, a atividade oscilatória presente no tálamo dorsal pode se propagar para córtex visual. Dessa forma, quando os olhos estão

³⁰ São os canais iônicos ativados por transmissores. Esses receptores, quando ativados, permitem a entrada de íons como, Na⁺, K⁺ e Cl⁻.

³¹ São os receptores acoplados à proteína G. Esses receptores, quando ativados, desencadeiam uma série de eventos intra-celulares que culminam na abertura de canais iônicos ativados por proteínas G, ou na emissão de segundos mensageiros.

abertos, os impulsos nervosos são constantemente transmitidos para córtex visual através do circuito mostrado na figura 3.23. Enquanto ativados, os circuitos neuronais bloqueiam o envio da atividade rítmica do tálamo para V1, o que desfaz a sincronia dos neurônios piramidais, presentes nas camadas II, III, IVB, V e VI de V1 (vide apêndice A, sessão A.10), e compõem a massa neural. A atividade do cérebro aumenta muito, mas a sincronização dos sinais se torna tão pequena que as ondas cerebrais praticamente anulam-se uma as outras. O resultado são ondas de pequena amplitude, frequências altas e irregulares, o ritmo β .

Quando os olhos estão fechados não há impulsos sendo transmitidos para córtex visual. Então, os circuitos neuronais permitem o envio da atividade rítmica do tálamo para V1, ocasionando oscilações numa mesma banda de frequências e a sincronização da massa neural. A atividade do cérebro diminui, mas os circuitos neuronais estão sincronizados em frequências próximas, resultando num ritmo de grande energia, o ritmo α . Resumindo, a inatividade do córtex visual ocasiona uma sincronização dos neurônios piramidais de V1, que compõem a massa neural medida por O1 e O2, produzindo oscilações na banda α , ou seja, um aumento na energia da banda α (ERS). De forma análoga o processamento de informação visual gera uma dessincronização dos neurônios piramidais de V1, resultando na diminuição da energia da banda α (ERD).

O padrão ERD/ERS do córtex visual pode ser medido por eletrodos sob o escalpo (Figura 3.22), mas se fosse utilizado numa ICC seria necessário que o usuário fosse capaz de abrir e fechar os olhos, o que não é possível para muitos portadores de paralisias motoras severas. O estudo do ERD/ERS ocorrido na banda α no córtex visual serve como analogia para o ERD/ERS que ocorre na banda μ no córtex motor durante a imaginação de movimento, porém o último não pode ser visualizado em uma única gravação de EEG, como de fato corre para o ERD/ERS do córtex visual. Esse fato será abordado em detalhes na sessão seguinte.

3.10 Características do ERD/ERS durante um MRP

A realização de tarefas mentais motoras envolve o circuito da alça motora. Esse circuito conecta a atividade cognitiva do lobo frontal, responsável pelo sinal inicial de desejo de mover um membro, ao córtex motor, onde o sinal será processado e enviado à medula para ativar os efetivos membros. Esse circuito também conecta as diversas áreas

motoras, como a área motora suplementar, a área pré-motora e o córtex motor primário, como analisado na sessão 2.14.

A imaginação motora inibe o envio da atividade rítmica do tálamo para M1, ocasionando a dessincronização dos neurônios piramidais da camada V de M1, da mesma maneira como ocorre para o córtex visual. Essa é uma dessincronização relacionada a eventos (ERD) de um MRP, e possivelmente envolve as frequências de 8 a 12 Hz. As frequências de 8 a 12 Hz obtidas sobre M1 são denominadas de ritmo μ . Esse ritmo foi descrito por Jasper e Andrews como “ritmo α precentral”, porque ocorre em condições semelhantes ao ritmo α , porém na área precentral do córtex motor. Dessa forma, os eletrodos sobre a área precentral (C3, Cz e C4) podem medir um decremento de energia (ERD) no sinal de EEG. E mesmo pessoas com amputações de membros apresentam ERD durante a imaginação de movimento do membro fantasma (Beisteiner, et al., 1995).

O ERD gerado durante a realização da tarefa mental de movimentação das mãos é contralateral, isto é, ocorre no hemisfério cerebral oposto ao movimento. Esse fato foi abordado na sessão 2.8, que mostra que as fibras do trato corticoespinhal se cruzam e a motricidade voluntária é 100% cruzada. Para a tarefa mental de imaginação de movimento da mão direita ocorre um ERD na banda μ no córtex motor primário do hemisfério cerebral esquerdo, que é medido pelo eletrodo C3. Para a tarefa mental de imaginação de movimento da mão esquerda ocorre um ERD na banda μ no córtex motor primário do hemisfério cerebral direito, que é medido pelo eletrodo C4. Durante a realização da tarefa mental de movimentação das mãos, a área referente à mão do córtex motor primário é ativada, assim como as áreas adjacentes, que são a área motora suplementar e a área pré-motora (Figura 2.7). R. Beisteiner et. al. (1995) mostrou que a diferença de potencial DC entre os eletrodos C3 e C4 é maior durante a imaginação de movimento da mão direita do que durante a imaginação de movimento da mão esquerda (Figura 3.24).

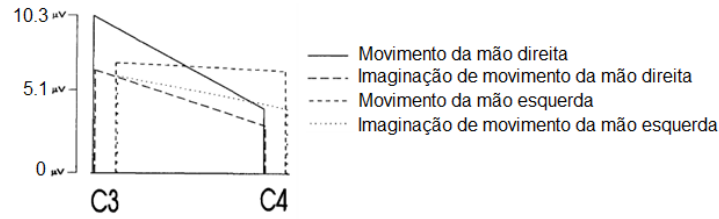


Figura 3.24 – Potencial DC dos eletrodos C3 e C4 (adaptado de Beisteiner, et al., 1995).

Isso ocorre porque o hemisfério esquerdo está envolvido com imaginação espaço-visual que é ativado durante o planejamento de ambas as tarefas mentais e, dessa forma, tem contribuição dominante sobre a imaginação motora. A lateralidade do hemisfério esquerdo durante a imaginação de movimento da mão direita pode influenciar a classificação das tarefas mentais, facilitando a identificação da imaginação de movimento da mão direita em detrimento da mão esquerda, por ter características mais acentuadas.

O método clássico para medir o ERS/ERD é descrito por G. Pfurtscheller e Lopes da Silva (1999), em que, dado um conjunto com várias gravações de EEG (épocas) contendo o ERD/ERS, os sinais são filtrados na faixa de frequência desejada. Depois os sinais são elevados ao quadrado obtendo as amostras de energia. Calcula-se a média da energia de todas as épocas e a curva é suavizada através do cálculo da média dos pontos num pequeno intervalo de tempo. Para obter os valores percentuais do ERD/ERS, calcula-se a energia da banda de frequência de interesse do período depois do evento *A* e a energia média de um período de referencia anterior ao evento *R*. O ERD e ERS são definidos como os valores percentuais de incremento ou decremento, respectivamente, de acordo com

$$ERD(\%) = \frac{(A - R)}{R \times 100} \quad (3.2)$$

De forma que se pode observar uma queda ou incremento na amplitude do sinal filtrado. A figura 3.25 mostra todas as etapas do procedimento para medir o ERD/ERS durante imaginações motoras.

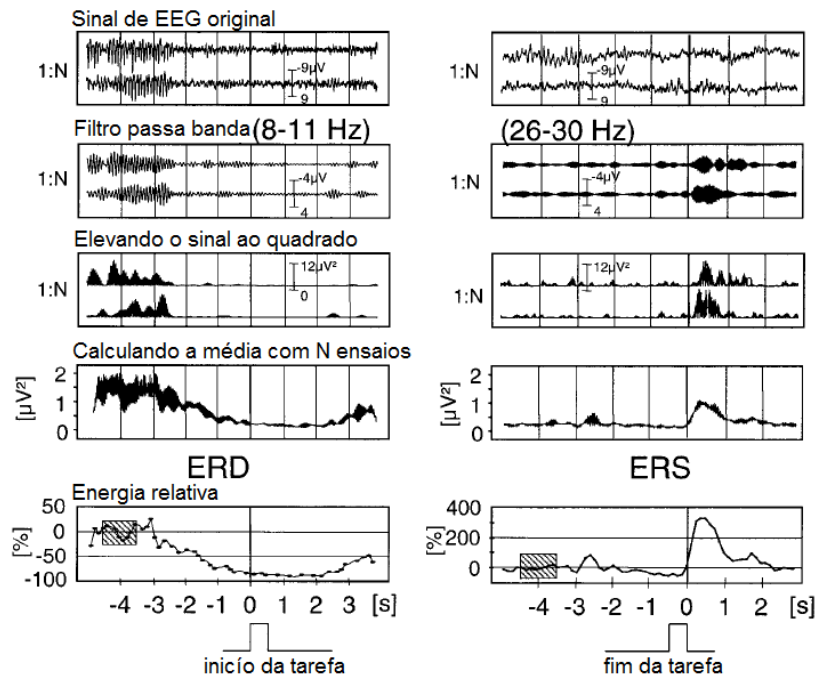


Figura 3.25 – Procedimento para medir ERD/ERS (adaptado de Pfurtscheller & Lopes, 1999).

Como dito anteriormente, os padrões ERD/ERS observados no córtex visual podem ser observados diretamente pelos eletrodos O1 e O2 através de uma análise de frequência, pois o córtex visual se encontra no lobo occipital que está na parte posterior do cérebro, aproximadamente isolado dos outros lobos cerebrais (Figura 2.3), dessa forma, os sinais provenientes do córtex visual não sofrem muita interferência dos sinais provenientes de outras áreas cerebrais e o padrão ERD/ERS do córtex visual pode ser observado em uma única gravação de EEG. De forma contrária, o córtex motor está no centro do cérebro cercado pelo lobo frontal, lobos temporal e occipital, assim, os sinais gerados pelas áreas vizinhas se misturam aos sinais do córtex motor e o sinal medido pelos eletrodos C3, Cz e C4 contém uma mistura de sinais provenientes de diferentes áreas cerebrais. Dessa forma, o padrão ERD/ERS gerado no córtex motor durante uma intenção de movimento não pode ser observado por uma única medição por isso é necessário o cálculo da média de várias épocas para se visualizar o ERD/ERS, como descrito por Pfurtscheller e Lopes da Silva (1999).

O procedimento descrito acima não pode ser implementado num classificador em tempo real, pois é necessário encontrar o ERD/ERS em apenas uma época. No artigo “Mental Task Recognition Based on EEG for Commanding a Robotic Wheelchair (2008)” o presente autor descreve a técnica de Separação Linear de Fontes (SLF), que será apresentada no próximo capítulo, e mostra que sua utilização pode desmisturar os

sinais medidos nos eletrodos sob o córtex motor e assim visualizar o padrão ERD/ERS em apenas uma medição. Dessa forma possibilita-se a utilização do padrão ERD/ERS de tarefas mentais motoras para o controle de uma ICC.

Um segundo método para medir o ERS/ERD é descrito J. Kalcher e G. Pfurtscheller no artigo denominado “Discrimination between phase-locked and non-phase-locked event-related EEG activity”(1995). Muitas vezes, potenciais evocados (EP) que ocorrem espontaneamente no cérebro, em resposta a ruídos ou quaisquer estímulos externos podem mascarar a sincronização ou dessincronização relacionada a evento. Isso ocorre quando a atividade do EP está na mesma banda de frequências do MRP. Para solucionar esse problema foi proposto o método da variância entre sessões (do inglês, *Intertrial Variance* - IV). Para o método IV, a variância é calculada por,

$$IV_{(j)} = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N \left(x_{f(i,j)} - \bar{x}_{f(j)} \right)^2 . \quad (3.3)$$

em que N é o número total de sessões, $x_{f(i,j)}$ é a j -ésima amostra da i -ésima sessão do sinal de EEG filtrado na banda requerida, e $\bar{x}_{f(j)}$ é a média da j -ésima amostra do sinal sobre todas as sessões filtradas. Da mesma forma, o ERD e ERS são definidos como os valores percentuais de incremento ou decréscimo em relação a um período de referencia. Nesse caso o período de referencia será formado pelas variâncias das amostras em um período anterior ao evento e o parâmetro R da equação (3.2) será a média das variâncias das amostras nesse período.

Bianchi et. al (1998) analisou as relações de coerência entre os sinais de EEG 9 eletrodos (F3, Fz, F4, C3, Cz, C4, P3, Pz e P4) filtrados nas bandas α e β , e também analisou a descrição tempo *versus* frequência do sinal de EEG através de um modelo auto-regressivo (AR) bivariado confirmando o fluxo de ativação desde a área frontal até a área parietal, através da alça motora, durante a preparação do movimento (Figura 3.26). No estudo citado o ERD/ERS foi calculado através da média de 80 repetições de movimento do dedo indicador da mão direita e o fluxo de ativação foi obtido através da análise da fase da Densidade Espectral de Potência (PSD) do sinal de EEG.

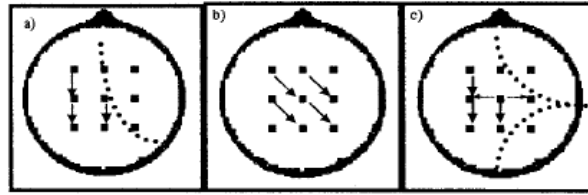


Figura 3.26 – Fluxo de ativação e desativação: a) fase de programação; b) fase de execução; c) fase de restabelecimento (Bianchi, et al., 1995).

Pode-se notar na Figura 3.26 (a) que durante a fase de programação do movimento do dedo indicador da mão direita o fluxo envolve apenas o lobo frontal e parietal do hemisfério esquerdo, se estendendo do eletrodo F3 ao eletrodo P3.

Capítulo 4 : Técnicas de Pré-processamento

Nesse capítulo são abordadas técnicas de filtragem, utilizadas para minimizar o ruído de origem técnica e fisiológica presente no EEG. O método, que chamamos de Separação Linear de Fontes, é sugerido para desmisturar os sinais corticais que originam o EEG.

4.1 Filtragem

O método de filtragem consiste em eliminar do sinal de EEG as componentes frequenciais em que o ruído está presente. Para isso são usados filtros passa-altas, passa-baixas, passa-banda ou rejeita-banda. O artefato de linha possui uma componente espectral fixa e bem definida em torno de 50 ou 60 Hz, desse modo, basta filtrar o sinal de EEG em frequências abaixo de 50 Hz para eliminar o artefato. Como estamos interessados na banda μ , não há perda de informação.

Os artefatos fisiológicos, como o ECG, o EMG e o EOG possuem componentes espectrais que sobrepõem ao espectro do EEG. A figura 4.1 mostra uma análise de coerência (vide apêndice C, sessão C.29) entre o sinal de EEG medido pelos eletrodos F3 e C3 de forma bipolar e o sinal de EMG medido bilateralmente no deltóide durante a realização de movimentos de extensão dos dedos das mãos (Grimm, et al., 2002). Pode-se notar que os espectros se sobrepõem em toda a faixa de frequências (Figura 4.1 (B)) e a maior coerência ocorre entre 6 e 16 Hz, corrompendo completamente a banda μ (Grosse, 2004).

Portanto, uma técnica de filtragem simples não é capaz de remover a interferência dos sinais de ECG, EMG e EOG. Para atenuar o efeito desse ruído sobre o EEG existem duas abordagens clássicas: a filtragem espacial e o método baseado em separação estatística de alta ordem (Azevedo, 2005).

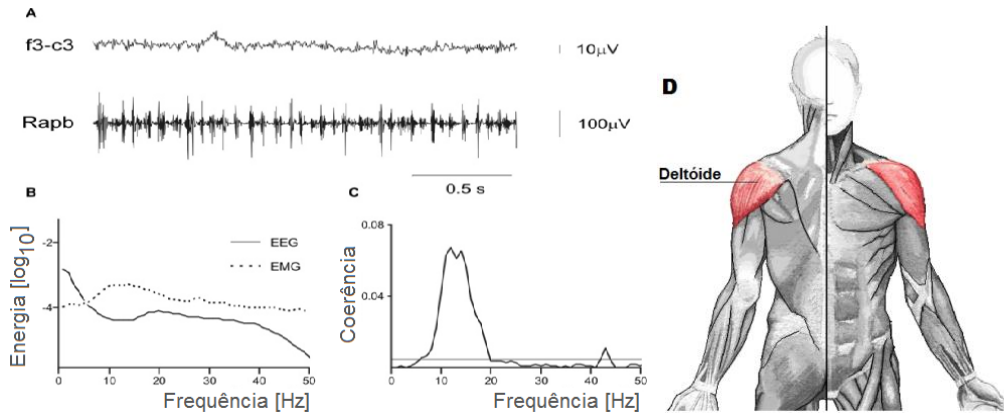


Figura 4.1 – (A) EEG e EMG; (B) Espectro de amplitude do EEG e do EMG; (C) Coerência entre o EEG e o EMG, a linha fraca horizontal representa o intervalo de confiança de 95% (vide apêndice c, sessão C.27) (Grosse, 2004); (D) Localização do músculo deltóide.

4.2 CAR

Uma técnica simples de filtragem espacial é conhecida por CAR (do inglês, *Commom Average Reference*). Essa técnica se baseia no fato de que os sinais biológicos externos ao cérebro afetam aproximadamente da mesma maneira todos os eletrodos de EEG, devido à grande distância da fonte de ruído aos eletrodos sob o escalpo. Então, a técnica consiste na subtração amostra a amostra, da média dos sinais dos eletrodos em cada um dos canais obtidos através de uma referência comum. O método CAR é dado por,

$$V_{car_i} = V_i - \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n V_j \quad . \quad (4.1)$$

em que V_i é o potencial entre o i -ésimo eletrodo e a referência, n é o número de canais e V_{car_i} é o potencial do i -ésimo eletrodo utilizando a referência pela média comum (Estébanez, 2003).

Como a média comum prioriza os sinais que estão presentes em uma grande quantidade de eletrodos, a subtração leva à eliminação destes sinais, funcionando como um filtro espacial passa-altas, ou seja, ele acentua componentes com distribuições altamente localizadas enquanto elimina as componentes que estão na maioria dos eletrodos, como de fato os ruídos biológicos externos (Estébanez, 2003; Azevedo, 2005).

Existem métodos mais complexos como a Separação Cega de Fontes (*BSS*, do inglês, *Blind Source Separation*) que utiliza Separação Estatística de Alta Ordem (*HOS*, do inglês, *High Order Statistical Separation*). O método *BSS* supõe que o sinal medido seja formado por uma mistura de sinais de várias fontes, onde não se sabe quem são as fontes, nem como o sinal foi misturado. Outros métodos utilizados para diminuir o efeito do ruído no sinal de EEG são a Análise de Componentes Independentes (*ICA*, do inglês, *Independent Component Analysis*) e Análise por Fração de Sinal (*SFA*, do inglês, *Signal Fraction Analysis*) (Azevedo, 2005).

4.3 Separação Linear de Fontes

No intuito de resolver o problema de separação cega de fontes, o presente autor propõe uma abordagem não estatística e relativamente simples, a Separação Linear de Fontes (SLF). O método SLF é baseado na suposição de um modelo para interação de fontes corticais, e propõe a separação dos sinais elétricos corticais (ECoG) linearmente misturados no encéfalo. Supomos que várias regiões do cérebro sejam fontes de sinal, de forma que o sinal medido por um eletrodo sobre o escalpo (EEG) seja uma combinação do sinal emitido por cada fonte no córtex (ECoG). O sinal emitido por cada fonte cortical sofre atenuação até ser captado no eletrodo, portanto, a contribuição de cada fonte no sinal medido no eletrodo está relacionada à distância que a fonte está do eletrodo (Figura 4.2). Modelamos um sistema em que existe um eletrodo para cada fonte cerebral, assim, pode-se formular um sistema linear de n equações e n incógnitas e a partir do sinal medido sob o escalpo, pode-se simular a obtenção de um sinal cortical (Benevides, 2008).

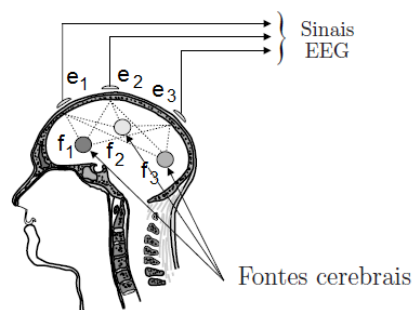


Figura 4.2 – Disposição das fontes corticais e eletrodos.

Conforme foi abordado na sessão 3.5, as células gliais e as células não piramidais possuem simetria esférica, não tendo um sentido definido de propagação do

sinal elétrico. Por consequência dessa simetria o campo eletromagnético produzido tem resultante nula. Já no caso das células piramidais, devido ao grande prolongamento de seus axônios, orientados aproximadamente em uma mesma direção, é possível identificar um campo eletromagnético resultante segundo uma distribuição bipolar (Figura 4.3 - Esquerda) (Araújo, et al., 2004).

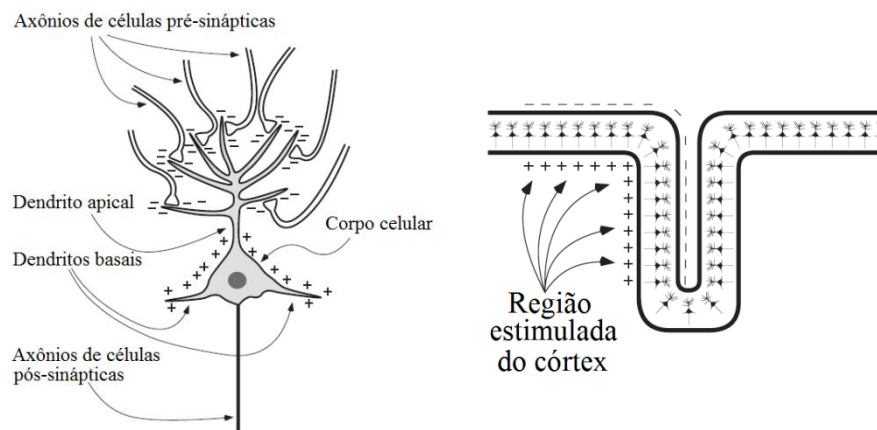


Figura 4.3 – Esquerda: Distribuição bipolar do neurônio piramidal (adaptado de Luck, 2005); Direita: Orientação do campo eletromagnético no córtex (adaptado de Luck, 2005).

O sinal de EEG é formado basicamente pela interação dos campos extracelulares de uma população com milhões de neurônios piramidais, presentes na quinta camada do córtex cerebral. Essa população de neurônios recebe o nome de massa neural. Na sessão 2.9 vimos que os neurônios piramidais estão orientados perpendicularmente às camadas corticais. Consideramos as fontes de sinal cerebral localizadas em diferentes áreas do córtex (fontes cerebrais) como massas neurais com milhões de neurônios piramidais perpendiculares à superfície do córtex. Portanto, nesse estudo, as fontes corticais serão modeladas como dipolos elétricos perpendiculares à superfície do córtex, devido à orientação dos neurônios piramidais e a distribuição bipolar de seu campo eletromagnético (Figura 4.3 - Direita) (Luck, 2005).

4.3.1 Campo elétrico das fontes corticais

Um dipolo elétrico é formado por uma carga positiva e uma carga negativa, iguais em módulo, separadas por uma distância muito pequena. Uma abordagem complexa para o problema de interação de fontes corticais envolveria a modelagem do encéfalo em camadas lisas e concêntricas, representando as diversas camadas de

revestimento do córtex (meninges, crânio e escalpo). Uma abordagem um pouco mais simples pode utilizar esferas ou elipsóides concêntricos, em que cada casca esférica possui diferentes valores para a permeabilidade e resistividade elétrica (Figura 4.4) (Cuffin, 1995).

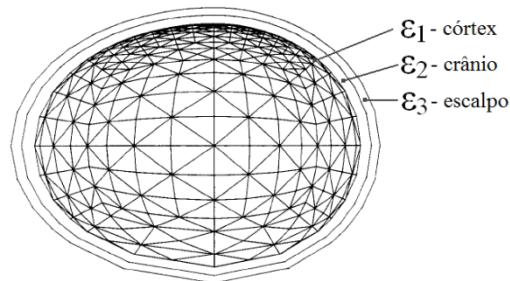


Figura 4.4 – Modelagem do encéfalo humano (adaptado de Cuffin, 1995).

Uma representação ainda mais realista poderia incluir variações de permeabilidade e resistência elétrica para diferentes locais da camada intermediária que representa o crânio, modelando as alterações de espessura dos diversos tipos de ossos e suturas que compõem o crânio (Figura 4.5 - Esquerda). A figura 4.5 – Direita mostra a classificação das estruturas ósseas cranianas. Em (A) e (B) são mostradas estruturas ósseas porosas, em (C) e (D) são mostradas estruturas ósseas compactas e em (E) e (F) são mostradas suturas.

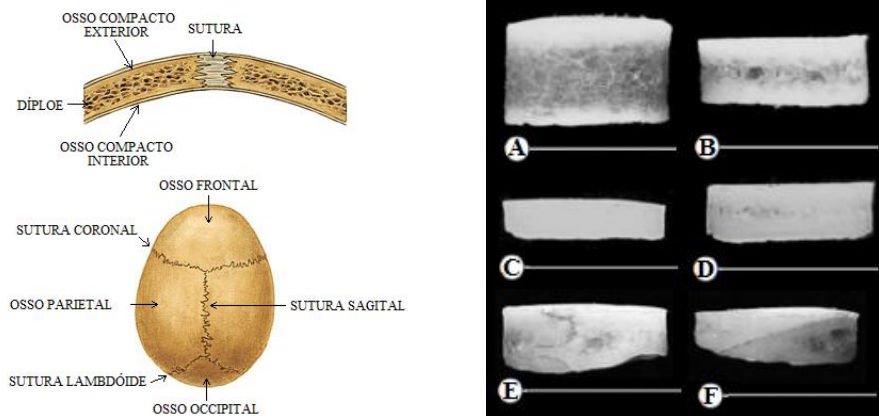


Figura 4.5 – Esquerda: Ossos e suturas cranianas; Centro: Camadas do crânio e sutura; Direita: (A) Osso padrão de três camadas (B) Osso de quase-três camadas (C) Osso padrão compacto (D) Osso quase-compacto (E) Sutura craniana denteada (F) Sutura craniana escamosa (adaptado de Tang et al., 2008).

A figura 4.6 mostra a resistência elétrica medida por (Tang et al., 2008), durante cirurgias, em crânios humanos vivos. Pode-se notar a alta resistência medida nas camadas ósseas compactas que são, o osso padrão compacto (*Standard compact skull*) e o osso quase-compacto (*Quasi-compact skull*), e a menor resistência medida nas camadas ósseas porosas, que são o osso padrão de três camadas (*Standard trilayer skull*) e o osso de quase-três camadas (*Quasi-trilayer skull*).

Em comparação com a resistência elétrica do osso padrão compacto, a resistência elétrica é até cinco vezes menor nas suturas denteadas (*Dentate suture*), que são a sutura coronal e lambdóide, entre o osso frontal e parietal, e entre o osso parietal e occipital, respectivamente. Dessa forma, os eletrodos posicionados próximos ou sobre as fissuras, como por exemplo, F7, F3, Fz, F4 e F8 próximos à fissura coronal e os eletrodos PO7, PO3, POz, PO4 e PO8 próximos à fissura lambdóide medirão sinais que sofreram atenuações até cinco vezes menores que os demais eletrodos.

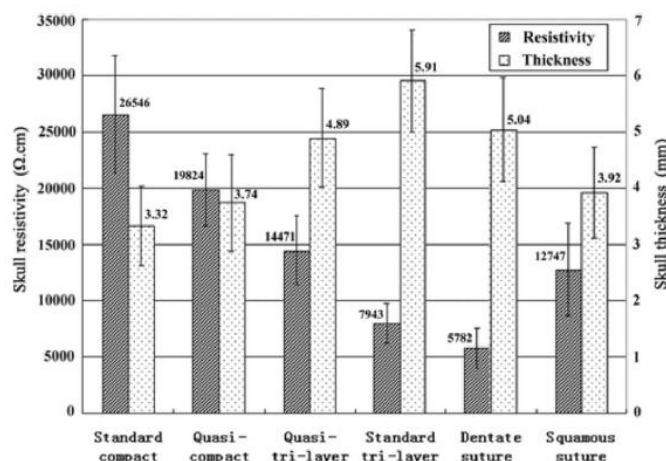


Figura 4.6 – Histograma da resistividade (esquerda) e espessura (direita) de diferentes estruturas ósseas cranianas (Tang et al., 2008).

Porém toda a complexidade envolvida no cálculo de dipolos em um modelo tão realista foge ao escopo dessa pesquisa, que propõe o design de um classificador capaz de identificar tarefas mentais utilizando o sinal de EEG. Portanto, simplificaremos o problema de pré-processamento do sinal de EEG assumindo que a superfície cerebral é homogênea, plana e sem rugosidade, dessa forma, todos os dipolos estão posicionados perpendicularmente a um mesmo plano e possuem a mesma permeabilidade e resistividade (Figura 4.7).

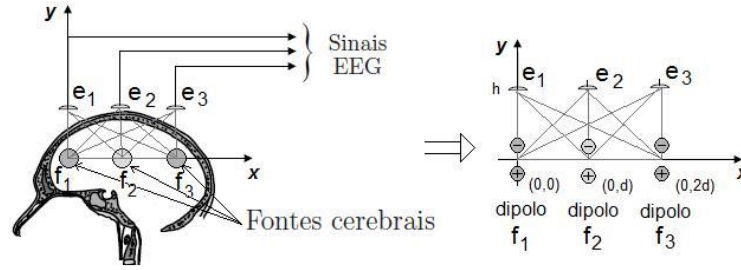


Figura 4.7 – Disposição simplificada das fontes corticais e eletrodos.

Para facilitar o cálculo da interação do campo elétrico dos dipolos, assumiremos uma nova simplificação, em que os eletrodos, ou seja, os pontos onde calcularemos a intensidade do campo elétrico estão posicionados no mesmo plano que passa pelo centro dos dipolos (Figura 4.8). Com esse modelo consideramos que não existe distância vertical entre as fontes cerebrais do córtex e os eletrodos sob o escalpo. Como não há distância, não há atenuação vertical entre o sinal de uma fonte cerebral e o sinal medido pelo eletrodo correspondente, mas existem as distâncias horizontais entre as fontes. De modo que o sinal medido por um eletrodo contém o sinal gerado na fonte cerebral que ele está localizado integralmente e também contém os sinais provenientes das fontes vizinhas, sofridas suas respectivas atenuações (Benevides, 2008).

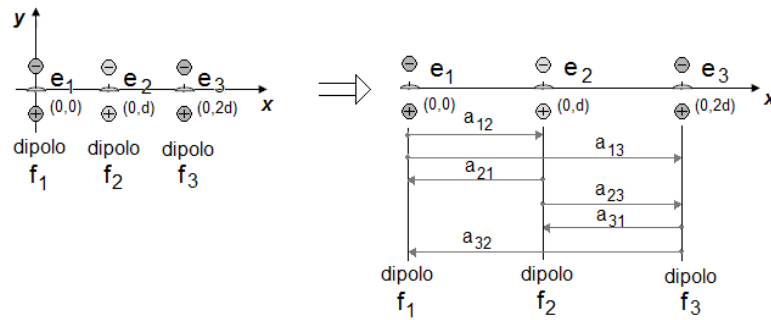


Figura 4.8 – Disposição simplificada das fontes cerebrais e eletrodos.

Na Figura 4.8, os eletrodos e_1 , e_2 e e_3 estão localizados no plano que passa pelo centro dos dipolos. As fontes estão separadas por uma distância d , que ocasiona uma atenuação. A atenuação é representada pelo termo a_{ij} , em que i representa a fonte de origem do sinal e j representa o eletrodo de destino do sinal. As atenuações estão representadas sobre as setas que indicam a direção de propagação do sinal, mas como não existe distância vertical entre o eletrodo e_i e a fonte f_i , os termos a_{11} , a_{22} e a_{33} são atenuações unitárias. A atenuação, a_{ij} , é uma constante com valor numérico real entre 0

e 1, calculada em função da distância d , que será multiplicada aos sinais das fontes. A atenuação a_{ii} é dita unitária, pois ao se multiplicar o sinal da fonte pela unidade, o sinal se mantém, e não ocorre atenuação.

Ditas as simplificações do modelo, nos voltaremos ao cálculo do campo elétrico dos dipolos, para que possamos encontrar uma fórmula para a atenuação em função da distância. Em virtude das simplificações, o cálculo do campo elétrico pode ser reduzido a um problema em duas dimensões, onde o dipolo (fonte cerebral) se encontra no eixo y e o ponto (eletrodo) se encontra no eixo x (Figura 4.9). Podemos calcular o campo dipolar utilizando o princípio da sobreposição, calculando o campo elétrico da carga positiva e negativa separadamente.

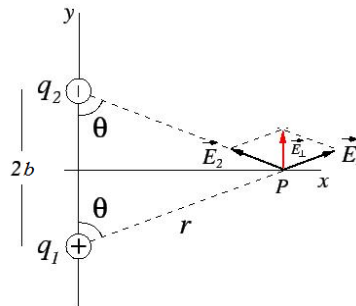


Figura 4.9 – Dipolo elétrico.

Assim, temos que,

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{|q|}{r^2} . \quad (4.2)$$

Onde q é o valor em módulo das cargas elétricas do dipolo, $2b$ é a distância entre as cargas, r é a distância do ponto P à carga, e ϵ é a permissividade elétrica do meio (Hayt & Buck, 2001). Devido à geometria do problema e a condição acima, as componentes x de \vec{E}_1 e \vec{E}_2 são iguais em módulo, mas com sentidos opostos e, portanto a componente x da resultante $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ é nula. A componente y é dada por,

$$\begin{aligned} \vec{E}_{1y} + \vec{E}_{2y} &= |\vec{E}_1| \cdot \cos \theta \cdot \vec{a}_y + |\vec{E}_2| \cdot \cos \theta \cdot \vec{a}_y \rightarrow \\ \vec{E}_{1y} + \vec{E}_{2y} &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{b}{r} \cdot \vec{a}_y + \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{b}{r} \cdot \vec{a}_y \rightarrow \end{aligned}$$

$$\vec{E}_{1y} + \vec{E}_{2y} = 2 \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{q \cdot b}{r^3} \cdot \vec{a}_y = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{2 \cdot q \cdot b}{(x^2 + b^2)^{3/2}} \cdot \vec{a}_y$$

$$\vec{E}_{1y} + \vec{E}_{2y} = k \cdot \frac{\vec{p}}{(x^2 + b^2)^{3/2}} \quad (4.3)$$

em que $k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon}$ e $\vec{p} = 2 \cdot q \cdot b \cdot \vec{a}_y$ é chamado momento de dipolo. Quando a distância entre as cargas é muito menor que a distância ao ponto de observação P , $x \gg b$, pode-se desprezar b no denominador da equação (4.3), obtendo,

$$\vec{E}_{1y} + \vec{E}_{2y} = k \cdot \frac{\vec{p}}{x^3} \quad (4.4)$$

4.3.2 Atenuação do campo elétrico

O campo elétrico da superfície do córtex \vec{E}_{ECOG} é assumido como o campo elétrico calculado no centro do dipolo de corrente, que corresponde ao ponto $O(0,0)$ da Figura 4.10.

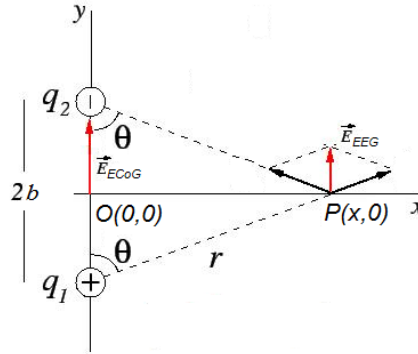


Figura 4.10 – Atenuação do potencial elétrico de um dipolo elétrico sobre o eixo x .

O campo elétrico da superfície do escalpo \vec{E}_{EEG} é calculado num ponto $P(x,0)$ a uma distância x do dipolo de corrente. Então, calculamos a atenuação do potencial elétrico,

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{ECoG} &= k \cdot \frac{\vec{p}}{(0+b^2)^{3/2}} = k \cdot \frac{\vec{p}}{b^3}; \quad \vec{E}_{EEG} = k \cdot \frac{\vec{p}}{(x^2+b^2)^{3/2}} \\
\vec{E}_{ECoG} \cdot a &= \vec{E}_{EEG} \rightarrow k \cdot \frac{\vec{p}}{b^3} \cdot a = k \cdot \frac{\vec{p}}{(x^2+b^2)^{3/2}} \rightarrow \\
a &= \frac{b^3}{(x^2+b^2)^{3/2}}. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Em virtude das simplificações sugeridas para a geometria das interações entre os dipolos, o cálculo da atenuação envolve o cancelamento dos momentos de dipolo de \vec{E}_{ECoG} e \vec{E}_{EEG} , o que torna a atenuação uma grandeza escalar. Dessa forma, está demonstrado que a atenuação proposta é uma constante multiplicativa de valor real a ser atribuída ao valor do sinal das fontes. E para $x \gg b$, temos que $a = (b/x)^3$. Como foi mencionado na sessão 4.3.1, existe uma variação de condutividade do crânio e dos tecidos de revestimento do cérebro. Essa variação de condutividade ocasiona uma variação no valor de ε para distintas áreas do cérebro (Figura 4.11).

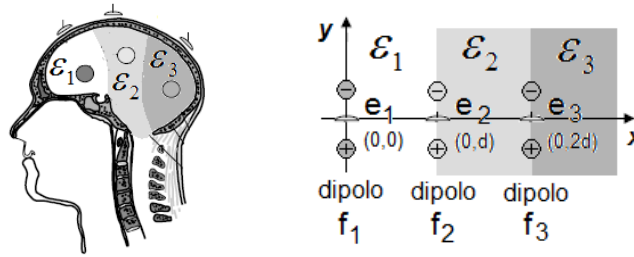


Figura 4.11 – Variação fictícia da permissividade elétrica no interior do encéfalo.

Então, para um sinal que se propagasse da fonte f_1 até e_3 , não poderíamos cancelar o termo k , como ocorreu na demonstração da equação 4.5. E teríamos que considerar as variações locais de ε para o cálculo da atenuação do campo elétrico. Para tornar a equação 4.5 válida para as interações entre os campos elétricos de quaisquer fontes cerebrais, assumimos que a permissividade elétrica do meio, ε , é constante para todo o encéfalo. Também assumimos que a distância entre as cargas dos dipolos, b , são iguais para todas as fontes cerebrais (Benevides, 2008).

4.3.3 Sistema de equações lineares

Para fins de exemplo, serão adotadas 3 fontes corticais, uma para lobo frontal, f_1 , uma para lobo parietal, f_2 e uma para lobo occipital, f_3 . O sinal será captado por 3 eletrodos, e_1 , e_2 e e_3 como mostrado na Figura 4.2. O cálculo da atenuação sofrida no sinal depende da distância da fonte ao eletrodo, portanto para simplificar o cálculo das distâncias aproximou-se a superfície do escalpo por um plano, de forma que os eletrodos estão posicionados sobre o mesmo (Figura 4.8) e as atenuações, a_{ij} , são calculadas em função de d . Nesse caso simples, o sistema apresenta muitas simetrias, então representamos as atenuações iguais como α , β e γ , de forma que,

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{22} = a_{33} &= \frac{b^3}{(x^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{b^3}{(0 + b^2)^{3/2}} = \frac{b^3}{b^3} = 1 = \alpha \\ a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} &= \frac{b^3}{x^3} = \frac{b^3}{d^3} = \beta \\ a_{13} = a_{31} &= \frac{b^3}{x^3} = \frac{b^3}{(2 \cdot d)^3} = \frac{b^3}{8 \cdot d^3} = \gamma \end{aligned} \quad . \quad (4.6)$$

Portanto, o sinal medido no eletrodo e_1 sobre o escalpo será uma combinação linear dos sinais f_1 , f_2 e f_3 , medidos sobre o córtex. Dessa forma, podemos montar um sistema de equações lineares para o exemplo simples com 3 fontes cerebrais (incógnitas) e 3 sinais de EEG (variáveis conhecidas), dado por,

$$\begin{cases} a_{11} \cdot f_1 + a_{21} \cdot f_2 + a_{31} \cdot f_3 = e_1 \rightarrow \alpha \cdot f_1 + \beta \cdot f_2 + \gamma \cdot f_3 = e_1 \\ a_{12} \cdot f_1 + a_{22} \cdot f_2 + a_{32} \cdot f_3 = e_2 \rightarrow \beta \cdot f_1 + \alpha \cdot f_2 + \beta \cdot f_3 = e_2 \\ a_{13} \cdot f_1 + a_{23} \cdot f_2 + a_{33} \cdot f_3 = e_3 \rightarrow \gamma \cdot f_1 + \beta \cdot f_2 + \alpha \cdot f_3 = e_3 \end{cases} \quad . \quad (4.7)$$

Em notação matricial, temos que,

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \alpha & \beta \\ \gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \alpha & \beta \\ \gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad . \quad (4.8)$$

Seja \mathbf{A} uma matriz com os coeficientes de atenuação, \mathbf{E} uma matriz com os sinais de EEG medidos no escalpo, e \mathbf{F} uma matriz com os sinais das fontes corticais, temos que,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{F} = \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{F} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{E} . \quad (4.9)$$

Portanto, a equação 4.9 define o processo de Separação Linear de Fontes, através da inversão da matriz de atenuação, \mathbf{A} . Definindo os valores das distâncias d e b , que são respectivamente as distâncias entre os eletrodos e a distâncias entre as cargas do dipolo, podemos calcular as atenuações α , β e γ . Então, através de um procedimento simples de inversão de matriz pode-se calcular os sinais emitidos pelas fontes cerebrais a partir do sinal medido sob o escalpo. Ou seja, esse procedimento permite a separação de fontes linearmente misturadas, de onde deriva à atribuição de seu nome, simulando a aquisição de um eletrocortigrama (ECoG) a partir de um eletroencefalograma (EEG).

Obviamente, os sinais medidos sob o córtex apresentam os padrões de ERD/ERS de forma muito mais nítida e proporcionam uma melhor taxa de acerto na classificação das tarefas mentais. Portanto, a utilização desse método, simulando o ECoG, deve proporcionar uma melhoria na taxa de acerto dos classificadores, fato que será abordado no capítulo 6.

Capítulo 5 : Classificadores

Neste capítulo serão abordados os classificadores utilizados para identificação da tarefa mental. Os classificadores implementados nesse trabalho pertencem a três famílias: classificadores baseados em regras de indução, classificadores estatísticos e classificadores com aprendizado. Dentre os classificadores baseados em regras, serão estudados os classificadores baseados em árvores de decisão. Dentre os classificadores estatísticos, ou Bayesianos, serão estudados classificadores com função discriminante quadrática, classificadores com função discriminante linear e classificadores com função discriminante regularizada. Dentre os classificadores com aprendizado serão estudadas as redes neurais artificiais (RNAs).

5.1 Classificador baseado em regras

Todos os classificadores abordados se baseiam diretamente ou indiretamente nos padrões ERD/ERS que ocorrem na banda μ durante a realização da tarefa mental. Começaremos analisando o classificador baseado em regras, pois seu algoritmo é o mais simples e seu vínculo ao padrão ERD/ERS é o mais evidente.

O classificador baseado em regras se baseia somente em fatos previamente conhecidos pelo programador. Portanto, esse tipo de classificador não possui aprendizado, já que suas regras são fixas e pré-determinadas. O algoritmo segue uma árvore de decisão, em que, cada nó folha corresponde a uma classe e cada nó de decisão contém um teste sobre algum atributo (Rezende, 2005).

5.2 Classificadores Bayesianos

Os classificadores Bayesianos são derivados da regra de Bayes³². A regra de Bayes é uma probabilidade condicional relacionando a probabilidade a posteriori $P(C_k|x)$ de ocorrência do evento x em uma classe C_k , com a probabilidade a priori $P(C_k)$ de ocorrência da classe C_k e a função densidade de probabilidade $P(x|C_k)$ (vide apêndice C, sessão C.10) (Garcia, 1994). De forma que a equação da regra de Bayes, previamente definida é dada por,

³² Thomas Bayes (1702-1761), matemático britânico que estabeleceu as bases para a inferência estatística e formulou o teorema agora conhecido como Teorema de Bayes.

$$P(\mathbf{C}_k | x) = \frac{P(x | \mathbf{C}_k) \cdot P(\mathbf{C}_k)}{P(x)} \quad . \quad (5.1)$$

em que $P(x)$ é somente um fator de escala, dado pelo teorema da probabilidade total, que garante que a soma das probabilidades a posteriori seja igual a 1 (vide apêndice C, sessão C.5), dado por,

$$P(x) = \sum_{k=1}^L P(x | \mathbf{C}_k) \cdot P(\mathbf{C}_k) \quad . \quad (5.2)$$

O espaço amostral S é particionado em L classes (equação 5.3), em que a probabilidade de ocorrência de uma classe \mathbf{C}_k em S é sua probabilidade a priori, $P(\mathbf{C}_k)$. O espaço amostral possui N amostras e cada classe possui N_i amostras. Se as amostras das classes puderem ser consideradas como amostras aleatórias da distribuição de S , então a probabilidade a priori pode ser estimada pela fração de cada classe em S (Friedman, 1989; Garcia, 1994). Então, a probabilidade a priori de ocorrência de uma classe \mathbf{C}_k é a fração do número de amostras N_k da classe \mathbf{C}_k e o número total de amostras do espaço amostral, N (equação 5.4).

$$S = [\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_k, \dots, \mathbf{C}_L] \quad (5.3)$$

$$P(\mathbf{C}_k) = \frac{N_k}{N} \quad (5.4)$$

O espaço amostral pode conter mais de uma característica, sendo bidimensional se possuir 2 características ou tridimensional se possuir 3 características. Para o caso geral em que S possui d características, S será um espaço multidimensional com d dimensões, ou seja, um hiper-espaço. Nesse caso, cada classe possuirá d características que foram observadas, ou amostradas, N_k vezes, em que $i=1,2,\dots,L$. Dessa forma, as classes são representadas por matrizes, em que as linhas correspondem às características, ou dimensões de S , e as colunas correspondem às observações, y , de cada característica, e são dadas por,

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,N_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{d,1} & \cdots & y_{d,N_1} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} y_{2,1} & \cdots & y_{2,N_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{d,2} & \cdots & y_{d,N_2} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{C}_L = \begin{bmatrix} y_{L,1} & \cdots & y_{L,N_L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{d,L} & \cdots & y_{d,N_L} \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Neste caso, o evento \mathbf{x} será um vetor de variáveis aleatórias de classe desconhecida, com dimensão d , correspondendo a uma observação das d características de S . A probabilidade a posteriori $P(\mathbf{C}_k|\mathbf{x})$ é a probabilidade de ocorrência da classe \mathbf{C}_k , dado que o evento \mathbf{x} ocorreu, e deriva da probabilidade condicional de variáveis aleatórias múltiplas. A partir das matrizes das classes e do vetor do evento, pode-se estimar a distribuição estatística do evento em cada classe, ou seja, sua função densidade de probabilidade (*pdf*, do inglês, *probability density function*), e para o caso geral em que o espaço S possui mais de uma dimensão, é estimada a *pdf* conjunta $P(\mathbf{x}|\mathbf{C}_k)$ das características de cada classe.

5.2.1 Classificadores normais

Na maioria dos casos $P(\mathbf{x}|\mathbf{C}_k)$ é aproximado pela distribuição normal multivariada ou gaussiana, dado o importante resultado do teorema central do limite (vide apêndice C, sessão C.15). Os classificadores Bayesianos que utilizam a distribuição normal multivariada são chamados de classificadores normais e formam um caso particular de classificação Bayesiana.

O teorema central do limite mostra que a soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) com quaisquer funções densidade de probabilidade, pode ser aproximado por uma *pdf* normal se o número de amostras for suficientemente grande (Garcia, 1994). Ou seja, podemos ter uma variável original com uma distribuição muito diferente da normal, mas se tomarmos várias amostras grandes dessa distribuição, e então fizermos um histograma das médias amostrais, a forma se parecerá com uma curva normal. Portanto, a função densidade de probabilidade comumente utilizada é a distribuição normal multivariada. Apenas os dois primeiros cumulantes da *pdf* normal não são nulos de forma que a normal é completamente definida por funções de seus momentos de primeira e segunda ordem (ver demonstração no apêndice C, sessão C.14), que são o vetor de valor esperado $\boldsymbol{\mu}$ (vide apêndice C,

sessão C.11) e a matriz de covariância Σ (Fukunaga, 1990). A distribuição normal é dada por,

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{C}_k) = N_k(\boldsymbol{\mu}_k, \Sigma_k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \cdot |\Sigma_k|^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_k)^T \Sigma_k^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_k)} . \quad (5.6)$$

em que d é o número de dimensões do espaço de características, que corresponde ao tamanho do vetor de variáveis aleatórias \mathbf{x} . $\boldsymbol{\mu}_k$ é vetor contendo o valor esperado de cada característica da classe \mathbf{C}_k e Σ_k é a matriz de covariância da classe \mathbf{C}_k , contendo as variâncias σ_i^2 de cada característica na diagonal e as covariâncias entre as características nos elementos fora da diagonal, em que ρ_{ij} é o coeficiente de correlação e σ_i é o desvio padrão (vide apêndice C, sessão C.19). $\boldsymbol{\mu}_k$ e Σ_k são dados por,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_k = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_d \end{bmatrix}, \quad \Sigma_k = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1d}\sigma_1\sigma_d \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2d}\sigma_2\sigma_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{d1}\sigma_d\sigma_1 & \rho_{d2}\sigma_d\sigma_2 & \cdots & \sigma_d^2 \end{bmatrix} . \quad (5.7)$$

Para a distribuição normal o valor esperado coincide com a média aritmética (ver demonstração no apêndice C, sessão C.14) de forma que o vetor de média amostral de \mathbf{C}_k , $\boldsymbol{\mu}_k$, é obtido a partir de

$$\boldsymbol{\mu}_k = \frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} \mathbf{y}_j$$

$$\mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} y_{k,1,1} & \cdots & y_{k,1,N_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k,d,1} & \cdots & y_{k,d,N_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \cdots & \mathbf{y}_{N_k} \end{bmatrix} . \quad (5.8)$$

em que \mathbf{y}_j é o vetor com uma observação de \mathbf{C}_k , e $j=1,2,\dots,N_k$.

Uma expressão polarizada para a variância amostral unidimensional é obtida no apêndice C, sessão C.14, através da derivada parcial da função geradora de cumulantes da normal, tomada em relação à variância. A matriz de covariância amostral de cada classe, Σ_k , é obtida a partir da expressão não polarizada, dada por,

$$\Sigma_k = \frac{1}{N_k - 1} \cdot \sum_{i=1}^{N_k} (\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\mu}_k) \cdot (\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T . \quad (5.9)$$

Como o somatório envolve a multiplicação do vetor $(\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\mu}_k)$ pelo seu transposto a matriz de covariância resultante é quadrada³³ e simétrica³⁴, o que é provado no teorema 2 do Apêndice D. O vetor de média amostral e a matriz de covariância amostral são chamados de estimadores amostrais (Fukunaga, 1990).

As amostras extraídas de uma população normal tendem a cair em um único conjunto, o centro do conjunto é determinado pelo vetor média e o formato do conjunto é determinado pela matriz de covariância. Os pontos de densidade constante são hiper-elipsóides onde a forma quadrática $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ é constante. Os eixos principais desses hiper-elipsóides são dados pelos autovetores de $\boldsymbol{\Sigma}$ e os autovalores determinam o tamanho desses eixos. A quantidade $r^2 = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ é chamada distância de Malahanobis quadrática de \mathbf{x} para $\boldsymbol{\mu}$. Assim, os contornos de densidade constante são hiper-elipsóides de distância de Malahanobis constante para $\boldsymbol{\mu}$ e o volume desses hiper-elipsóides mede a dispersão das amostras sobre a média corresponde à distância de Malahanobis (Duda, et al., 2001).

A Figura 5.1 - Esquerda mostra uma Distribuição normal univariada da variável aleatória x . A distribuição é definida pela média μ e desvio padrão σ , sendo que 95% da normal está no intervalo $|x - \mu| \leq 2\sigma$. A Figura 5.1 - Direita mostra o espaço de características bidimensional das variáveis aleatórias x_1 e x_2 . A curva normal bivariada estaria representada em um espaço tridimensional em função de x_1 , x_2 e da probabilidade $P(x)$, e centrada na média $\boldsymbol{\mu}$. Nessa figura as elipses representam planos de corte em diferentes alturas da normal, que são as distâncias de Mahalanobis e mostram linhas de mesma densidade de probabilidade. (Duda, et al., 2001).

A *pdf* normal é calculada para cada classe e pode-se calcular a probabilidade a posteriori do vetor de variáveis aleatórias, \mathbf{x} , estar contido na respectiva classe por meio da equação (5.1). Então, a regra da máxima semelhança é utilizada para atribuir \mathbf{x} a uma determinada classe. A regra determina que o vetor de amostras pertence à classe com maior função discriminante (g_{C_k}) (Anderson, et al., 2007), sendo definida como,

³³ Uma matriz quadrada é uma matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas.

³⁴ Uma matriz simétrica é uma matriz que é igual a sua transposta: $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$.

$$\mathbf{x} \in \mathbf{C}_k / \mathbf{C}_k = \arg \max_{i \in \{1, \dots, k\}} (g_{C_i}) \cdot \quad (5.10)$$

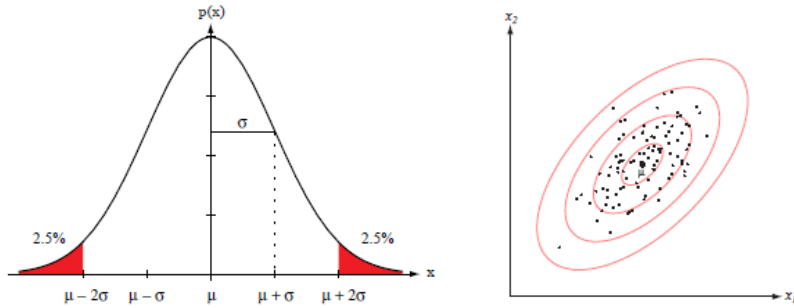


Figura 5.1 – Esquerda: Distribuição normal univariada; Direita: Distâncias de Mahalanobis de uma distribuição normal bivariada (Duda, et al., 2001).

5.2.2 Análise por discriminante quadrático

A função discriminante quadrática é dada pelo logaritmo da probabilidade a posteriori $P(\mathbf{C}_k | \mathbf{x})$ (equação 5.11). O termo $-\ln(p(\mathbf{x}))$ é somente um fator de escala e pode ser desprezado. Nos casos onde a probabilidade a priori $P(\mathbf{C}_k)$ é igual para todas as classes, o termo $\ln(P(\mathbf{C}_k))$ também pode ser desprezado. Por fim, o termo $-d/2 \cdot \ln(2\pi)$ é uma constante na equação e também pode ser desprezado (Duda, et al., 2001).

$$\begin{aligned} g_{C_k}(\mathbf{x}) &= \ln(P(\mathbf{C}_k | \mathbf{x})) = \ln\left(\frac{p(\mathbf{x} | \mathbf{C}_k) \cdot P(\mathbf{C}_k)}{p(\mathbf{x})}\right) = \ln(p(\mathbf{x} | \mathbf{C}_k)) - \ln(p(\mathbf{x})) + \ln(P(\mathbf{C}_k)) \Rightarrow \\ g_{C_k}(\mathbf{x}) &= \ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \cdot |\Sigma_k|^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu_k)^T \Sigma_k^{-1} (\mathbf{x} - \mu_k)}\right) \Leftrightarrow \\ g_{C_k}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu_k)^T \Sigma_k^{-1} (\mathbf{x} - \mu_k) - \frac{d}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln|\Sigma_k| \Leftrightarrow \\ g_{C_k}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu_k)^T \Sigma_k^{-1} (\mathbf{x} - \mu_k) - \frac{1}{2} \ln|\Sigma_k| \end{aligned} \quad (5.11)$$

Portanto, são calculados a média e a matriz de covariâncias a partir dos elementos das classes e as respectivas funções discriminantes quadráticas, que estão em função de \mathbf{x} . Quando o evento \mathbf{x} ocorre, o vetor é aplicado nas funções discriminante, que retornam um número correspondendo à probabilidade de \mathbf{x} pertencer a uma determinada classe. A partir da regra da máxima semelhança, o vetor \mathbf{x} é atribuído a

classe com maior função discriminante quadrática, ou seja, a função discriminante que apresentou maior probabilidade de conter \mathbf{x} .

O presente método de classificação, utilizando funções discriminantes quadráticas é denominado análise por discriminante quadrático (*QDA*, do inglês, *Quadratic Discriminant Analysis*), pois geometricamente as regiões de decisão são hiperquádricas em torno das hiper-elipsóides que definem as classes (Duda, et al., 2001). A Figura 5.2 - Esquerda mostra uma região de decisão não linear entre duas normais univariadas com variâncias diferentes e mesma média. A Figura 5.2- Centro mostra uma região de decisão não linear entre duas normais bivariadas. A Figura 5.2 - Direita mostra uma regiões de decisão não lineares entre quatro normais bivariadas.

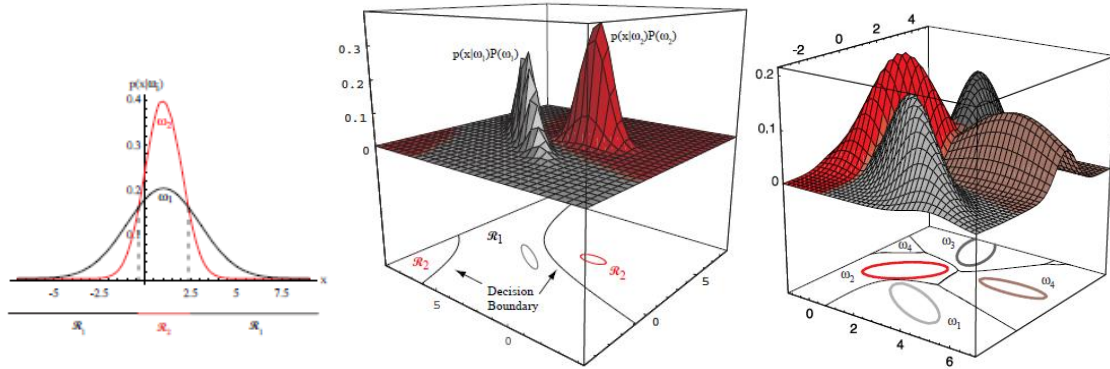


Figura 5.2 – Regiões de decisão não lineares (Duda, et al., 2001).

5.2.3 Análise por discriminante linear

A análise por discriminante linear (*LDA*, do inglês, *Linear Discriminant Analysis*) é um caso particular do discriminante quadrático. Nesse caso as matrizes de covariâncias de todas as classes são iguais ($\Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k = \dots = \Sigma_L = \Sigma$), portanto o termo $-1/2 \cdot \ln|\Sigma|$ da equação 5.11 é independente da classe C_k , se tornando uma constante que pode ser desprezada, e nos casos onde a probabilidade a priori $P(C_k)$ é igual para todas as classes, esse termo também pode ser desprezado, de forma que,

$$g_{C_k}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k) - \frac{1}{2} \ln|\boldsymbol{\Sigma}| + \ln(P(C_k)) \Rightarrow$$

$$g_{C_k}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k) \quad (5.12)$$

A expansão do termo quadrático $(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_k)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_k)$ da equação 5.12 resulta em:

$$\begin{aligned} g_{C_k}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_k)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_k) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_k) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_k^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_k) \Leftrightarrow \\ g_{C_k}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_k + \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_k^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_k^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_k \Rightarrow \\ g_{C_k}(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\mu}_k^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_k^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_k . \end{aligned} \quad (5.13)$$

Na equação 5.13 o termo $-(1/2)\mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{x}$ é independente da classe C_k , se tornando uma constante que pode ser desprezada. Dessa forma, a função discriminante da equação 5.13 resulta em uma região de decisão linear. Geometricamente, isso corresponde à situação em que as amostras estão em conjuntos de hiper-elipsóides de tamanho e forma iguais, sendo o conjunto de cada classe, C_k , centrado sobre o vetor média $\boldsymbol{\mu}_k$, e a região de separação é definida por um hiperplano (Duda, et al., 2001). Por fim, aplica-se a regra da máxima semelhança para atribuir uma classe à observação indeterminada \mathbf{x} .

A figura 5.3 mostra uma região de decisão linear para normais com matrizes de variância iguais e arbitrárias. A figura 5.3 – Esquerda mostra a região de separação para duas normais univariadas, em que a probabilidade a priori da classe w_1 é 0,7 e w_2 é 0,3; A figura 5.3 – Centro mostra a região de separação para duas normais bivariadas, em que a probabilidade a priori das classes w_1 e w_2 é 0,5; A figura 5.3 – Direita mostra o plano de separação para duas normais trivariadas, e a probabilidade em que a priori das classes w_1 e w_2 é 0,5.

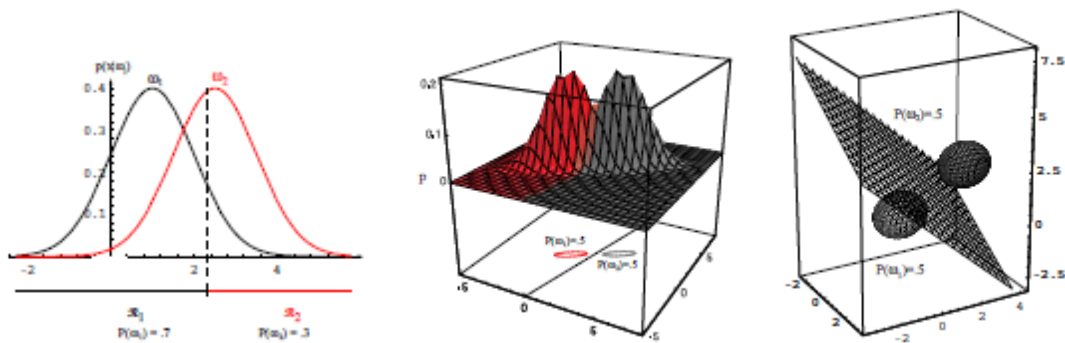


Figura 5.3 – Região de decisão linear para normais com matrizes de variância iguais e arbitrárias (Duda, et al., 2001).

5.2.4 Análise por discriminante regularizado

Os classificadores *QDA* e *LDA* produzem bons resultados quando as funções densidade de probabilidade são aproximadamente normais e podem-se obter boas estimativas para os parâmetros μ e Σ . No contexto de classificação a simetria elipsoidal associada à distribuição normal parece ser mais importante que sua forma detalhada. Regras de classificação baseadas em *QDA* geralmente requerem mais amostras que as baseadas em *LDA* e são mais sensíveis a violações dos pressupostos básicos. Portanto, *QDA* e *LDA* não são aplicáveis em problemas com poucas amostras devido às restrições envolvidas na estimativa das matrizes de covariância (Friedman, 1989).

Jerome H. Friedman, propôs em 1989 uma técnica para superar problema da singularidade das matrizes estimadas em poucas amostras, chamada análise por discriminante regularizado (*RDA*, do inglês, *Regularized Discriminant Analysis*). O potencial do *RDA* em diminuir o risco de erro de classificação, comparado ao *QDA* ou *LDA*, dependerá da situação (número de amostras e distribuição das populações). Em situações em que o número de amostras das classes N_i são muito maiores que as dimensões do hiper-espaço medido L , nenhuma regularização é necessária, mas as situações em que as matrizes de covariância são muito diferentes ou não muito elipsoidais favorecem o uso do *RDA*.

Quando o número de amostras das classes N_i , $1 \leq i \leq L$, são menores, comparados à dimensão do hiper-espaço de características d , a matriz de covariância estimada se torna muito variável. Além disso, quando $N_i < d$ nem todos seus parâmetros são ao menos identificáveis. A regularização reduz a variância associada às amostras com base na estimativa à custa de um potencial aumento de viés³⁵. Esse compromisso entre variância e viés é geralmente regulado por um ou mais parâmetros (graus de confiança) que controlam a força da polarização para obter um conjunto de valores de parâmetros plausíveis (Friedman, 1989).

Um método de regularização é a substituição da matriz de covariância individual pela média ponderada, como descrito na equação 5.14. A matriz de covariâncias de cada classe é ponderada pela razão entre número de amostras que possui e o número total de amostras de todas as classes (espaço amostral), ou seja, Σ_k é ponderada por sua probabilidade a priori.

³⁵ Termo utilizado em estatística para expressar erro sistemático ou tendenciosidade (do inglês, *bias*).

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^L \Sigma_k \cdot N_k \quad (5.14)$$

Em que N é o número total de amostras de S , L é o número total de classes e N_k é o número de amostras da classe C_k . Esse método aplica um considerável grau de regularização, através da redução substancial do número de parâmetros a ser estimado. Mesmo se as matrizes de covariância das classes forem substancialmente diferentes, a diminuição da variância realizada utilizando a estimativa no conjunto amostral pode, por vezes, levar a um desempenho superior, especialmente em conjuntos amostrais pequenos. Essa é grande parte da razão para o sucesso e popularidade da Análise por Discriminante Linear com matriz de covariâncias regularizada (Friedman, 1989).

A escolha entre QDA e LDA representa um conjunto de alternativas de regularização bastante restritivas. Um conjunto de alternativas de regularização menos limitado é obtido com a adição de um parâmetro variável, λ . Esse é o segundo método de regularização apresentado, dado por,

$$\hat{\Sigma}_k(\lambda) = \frac{(1-\lambda) \cdot (\Sigma_k \cdot N_k) + \lambda \cdot \sum_{i=1}^L \Sigma_i \cdot N_i}{(1-\lambda) \cdot N_k + \lambda \cdot N} = \frac{(1-\lambda) \cdot (\Sigma_k \cdot N_k) + \lambda \cdot \hat{\Sigma} \cdot N}{(1-\lambda) \cdot N_k + \lambda \cdot N} \quad (5.15)$$

em que $\hat{\Sigma}$ é dado pela equação 5.14. O parâmetro de regularização λ assume valores $0 \leq \lambda \leq 1$. O valor $\lambda=0$ dá origem à análise de discriminante quadrático (QDA), enquanto $\lambda=1$ leva à análise de discriminante linear (LDA). A regularização fornecida pela equação 5.15 ainda é bastante limitada e não é a única forma natural para regularizar o QDA . O efeito da regularização na análise de discriminante pode ser visto pela representação da matriz de covariância em sua decomposição espectral (Friedman, 1989). E o teorema espectral diz que para toda matriz real simétrica, \mathbf{M} , existe uma matriz ortogonal \mathbf{Q} , tal que:

$$\mathbf{M} = \mathbf{Q} \times \mathbf{D} \times \mathbf{Q}^T \quad (5.16)$$

Em que \mathbf{D} é uma matriz diagonal com os autovalores de \mathbf{M} e \mathbf{Q} é a matriz cujas colunas são auto-vetores de \mathbf{M} formando uma base ortonormal de \mathfrak{R}^n . De forma que a matriz \mathbf{A} pode ser diagonalizada por uma matriz ortogonal de seus autovetores. O

teorema espectral é mostrado na sessão D.4 do Apêndice D. Portanto, a matriz de covariância Σ_k da classe C_k , simétrica e quadrada, pode ser representada através da matriz diagonal Λ_k de autovalores, e a matriz Φ_k autovetores, dadas por,

$$\Sigma_k = \Phi_k \times \Lambda_k \times \Phi_k^T \quad (5.17)$$

$$\Phi_k = [\mathbf{v}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_d], \quad \Lambda_k = \begin{bmatrix} \delta_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_d \end{bmatrix}.$$

A multiplicação de matrizes da equação 5.17 pode ser representada alternativamente pelo somatório,

$$\Sigma_k = \sum_{i=1}^d \delta_i \cdot \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i^T. \quad (5.18)$$

Em que a matriz inversa, Σ_k^{-1} , nessa representação é dada por,

$$\Sigma_k^{-1} = \sum_{i=1}^d \frac{\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i^T}{\delta_i}. \quad (5.19)$$

E a função discriminante quadrático da equação 5.11 se torna,

$$g_{C_k}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d \frac{|\mathbf{v}_i^T \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k)|^2}{\delta_i} + \sum_{i=1}^d \ln(\delta_i) - 2 \ln(P(C_k)). \quad (5.20)$$

O discriminante da equação 5.20 é muito ponderado pelos menores autovalores e as direções associadas aos seus autovetores. As estimativas baseadas na equação 5.9 produzem estimativas tendenciosas dos autovalores, os maiores autovalores são potencializados para grandes valores e os menores são potencializados para valores que são muito pequenos. Esse fenômeno se torna mais pronunciado à medida que o tamanho das populações amostrais decresce (Friedman, 1989). Por exemplo, se as matrizes de covariância das classes forem todas múltiplas, completamente diferentes, da matriz identidade, então uma retração para o *LDA* introduziria grandes distorções, enquanto

uma retração de cada matriz de covariância de classe em torno da matriz identidade multiplicada pelo autovalor médio ($\text{trace}[\hat{\Sigma}_k]/d$)³⁶ não introduziria quase nenhuma distorção. Para esse fim, a matriz de covariância da classe é regularizada por,

$$\hat{\Sigma}_k(\lambda, \gamma) = (1 - \lambda) \cdot \hat{\Sigma}_k(\lambda) + \frac{\gamma}{d} \cdot \text{trace}[\hat{\Sigma}_k(\lambda)] \cdot I, \quad (5.21)$$

em que a função *trace* é dada por,

$$\text{trace}[\hat{\Sigma}_k(\lambda)] = \frac{1}{d} \cdot \sum_{i=1}^d \delta_i. \quad (5.22)$$

A matriz $\hat{\Sigma}_k(\lambda)$ é dada pela equação 5.15. Para um dado valor de λ , o parâmetro adicional de regularização γ assume valores $0 \leq \lambda \leq 1$ e controla a contração em torno de um múltiplo da matriz identidade. O multiplicador é apenas o autovalor médio de $\hat{\Sigma}_k(\lambda)$. A contração tem o efeito de decrescer os maiores autovalores e incrementar os menores autovalores, desse modo, contrabalanceando a tendenciosidade, ou viés, inerente aos autovalores estimados. Os valores $\lambda=0$ e $\gamma=0$ representam a Análise por Discriminante Quadrático (*QDA*), enquanto $\lambda=1$ e $\gamma=0$ representam a Análise por Discriminante Linear (*LDA*). As equações 5.15 e 5.21 representam as duas famílias de parâmetros de regularização, e quando substituídos na função discriminante quadrático da equação 5.11, obtém-se,

$$g_{C_k}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k)^T \cdot \hat{\Sigma}_k^{-1}(\lambda, \gamma) \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k) - \frac{1}{2} \ln |\hat{\Sigma}_k(\lambda, \gamma)| + \ln(P(C_k)). \quad (5.23)$$

A equação 5.23 representa a função discriminante regularizado que será aplicada a regra da máxima semelhança para atribuir uma classe à observação indeterminada \mathbf{x} .

³⁶ A função *trace* em várias plataformas, inclusive o Matlab®, realiza a soma dos autovalores de uma matriz.

5.2.5 Considerações sobre a estacionariedade do sinal de EEG

Os classificadores normais são classificadores Bayesianos que utilizam a distribuição normal. Por serem derivados da distribuição normal, utilizam estimativas independentes do tempo em função dos momentos de até 2ª ordem. Mas, o sinal de EEG é a medida da tensão no escalpo em função do tempo e, portanto, a energia de uma banda de frequências também será uma característica em função do tempo. Suas características variam aleatoriamente com o tempo e formam um vetor de variáveis aleatórias, $\mathbf{x}(t)$, cuja natureza da aleatoriedade é dependente do tempo. Portanto o sinal de EEG é um processo estocástico, mas para se utilizar os métodos de classificação normal é necessário assumir que as características do sinal de EEG e, portanto, o sinal de EEG, sejam estacionários (vide apêndice C, sessão C.25).

Um sinal é considerado estacionário no sentido estrito (SSS, do inglês, *Strict Sense Stationarity*) se sua distribuição estatística independe do instante de tempo em que é observada. Então, as probabilidades das amostras do processo estocástico são independentes de um instante de origem, isto é, as probabilidades de amostras observadas nos instantes (t_1, t_2, \dots, t_r) não irão diferir das probabilidades de amostras observadas nos instantes $(t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_r + \tau)$. No entanto, essa condição é dificilmente encontrada na prática, e usualmente se pode determinar somente que a média é constante e a autocovariância (ou equivalentemente a autocorrelação) é uma função de $(t_1 - t_2)$ apenas. Esta é uma definição mais fraca para estacionariedade e é chamada estacionariedade no sentido amplo (WSS, do inglês, *Wide Sense Stationarity*). Um processo SSS sempre será WSS, enquanto o contrário não é válido (Garcia, 1994).

Portanto para que um sinal $\mathbf{x}(t)$ seja WSS:

- i. A função média deve ser constante para todo o tempo: $\boldsymbol{\mu}_x(t) = E[\mathbf{x}(t)] = \boldsymbol{\mu}, \quad \forall t$.
- ii. A função de autocorrelação, ou equivalentemente, a autocovariância, deve ser função de $(t_1 - t_2)$ somente. Ou seja, deve ser independente de deslocamentos no tempo: $\mathbf{C}_x(t_1, t_2) = \mathbf{C}_x(\tau), \quad \forall t_1, t_2$ e $\mathbf{R}_x(t_1, t_2) = \mathbf{R}_x(\tau), \quad \forall t_1, t_2$, em que $\tau = (t_1 - t_2)$.

Está mostrado no apêndice C que se um processo estocástico gaussiano é estacionário no sentido amplo também será estacionário no sentido estrito (Garcia, 1994). Isso ocorre porque a *pdf* de um processo estocástico gaussiano é completamente

definida pela média $\mu_x(t)$ e a autocovariância $C_x(t_1, t_2)$. Se $\mathbf{x}(t)$ é WSS, então a média é constante, μ , e a autocovariância depende somente das diferenças entre os intervalos de tempo, $(t_i - t_j)$. Segue, então que a *pdf* de $\mathbf{x}(t)$ depende somente dessas diferenças e, portanto é invariante em relação a deslocamentos no tempo. Portanto, o processo também é estacionário no sentido estrito, SSS.

Os classificadores normais são construídos a partir da suposição de que a função distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias seja gaussiana, para esse propósito, não faz diferença em considerarmos o sinal de EEG como SSS ou WSS de forma que nos referiremos ao sinal de EEG simplesmente como um processo estocástico estacionário.

O sinal de EEG pode ser considerado um processo estocástico estacionário em curtos períodos de tempo. No entanto, o tamanho do período de tempo que o sinal pode ser considerado estacionário depende da quantidade de dados presentes, do tipo de análise que está sendo realizada e as medidas que caracterizam os dados. São encontrados trabalhos que demonstram que o EEG pode ser considerado estacionário no sentido amplo desde alguns segundos até minutos (Blanco, et. al., 1995). Portanto, realizando a medição do EEG em janelas de 1 segundo, e de acordo com os estudos realizados por (Pardey, Roberts e Tarassenko, 1995) e (Popivanov & Mineva, 1999), pode-se aproximar o EEG como um processo estocástico estacionário no sentido amplo de forma que a natureza da aleatoriedade seja independente do tempo e sua média e matriz de covariâncias sejam constantes, $\mu(t) = \mu$ e $\Sigma(t) = \Sigma$.

Dessa forma, para janelas de sinal de EEG com duração de 1 segundo, estima-se μ e Σ , e a partir da suposição que sua distribuição seja a gaussiana, pode-se utilizar as funções discriminantes dos classificadores quadráticos, lineares e regularizados. São utilizadas janelas pré-classificadas de EEG para treinamento, em que os parâmetros μ e Σ de cada classe são estimados, e janelas sem classificação em que apenas se observa o vetor \mathbf{x} . A classe atribuída à \mathbf{x} será a classe que obteve maior função discriminante, de acordo com a regra da máxima semelhança.

5.3 Redes Neurais Artificiais

Geralmente as redes neurais artificiais (RNAs) são utilizadas para resolver problemas complexos de reconhecimento e classificação de padrões. Sua capacidade de generalização a partir de exemplos, sua habilidade em reproduzir funções não-lineares

de entrada e sua estrutura regular com processamento altamente paralelo a tornam uma especialista na tarefa de classificação. Em muitos problemas as RNAs obtêm resultados superiores aos métodos estatísticos de classificação, por isso sua utilização está em grande avanço, principalmente em áreas clínicas, envolvendo a análise de sinais biológicos como, por exemplo, em (Cavalieri, et. al., 2007).

As pesquisas sobre redes neurais artificiais foram iniciadas em 1943 pelo neurofisiologista McCulloch e o matemático Walter Pitts, que sugeriram a construção de uma máquina inspirada no cérebro humano. Em 1949, o psicólogo Donald Hebb escreveu o livro intitulado “The Organization of Behavior (A Organização do Comportamento)” que propôs uma lei de aprendizagem específica para as sinapses dos neurônios.

Em 1956, no “Dartmouth College” nasceram os dois paradigmas da inteligência artificial (IA), a simbólica e o conexionista. A inteligência artificial simbólica tenta simular o comportamento inteligente humano desconsiderando os mecanismos responsáveis para tal. Enquanto a inteligência artificial conexionista acredita que construindo um sistema que simule a estrutura do cérebro, este apresentará inteligência, ou seja, será capaz de aprender, assimilar, errar e aprender com seus erros.

Os estudos posteriores em RNA desenvolveram-se sobre as bases da Inteligência Artificial Conexionista e em 1957, Frank Rosenblatt mostrou em seu livro “Principles of Neurodynamics (Princípios da Neurodinâmica)” o modelo da Perceptron, que é a forma mais simples de RNA existente e só pode ser usada para classificação de elementos linearmente separáveis. Em 1960, Bernard Widrow e Hoff propuseram a RNA Adaline. Durante o período de 1967 a 1982 poucas pesquisas foram publicadas devido à falta de financiamento, que ocorreu em decorrência do descrédito na aplicabilidade dessa área.

Em 1982, o físico e biólogo John Hopfield escreveu artigos sobre redes simétricas e Kohonen publicou um artigo importante sobre mapas auto-organizáveis em redes com aprendizado não-supervisionado. Em 1986, David Rumelhart e James McClelland publicaram o livro “Parallel Distributed Processing (Processamento Paralelo Distribuído)”. Nesse período o método chamado retro-propagação do erro foi introduzido por Rumelhart, Hinton e Williams, possibilitando a criação das redes neurais com retro-propagação de erro, utilizadas nesta dissertação.

5.3.1 Modelagem matemática

Uma rede neural artificial (RNA) é “um modelo não-linear, computacional e matemático, para processamento de informações, com arquiteturas inspiradas na organização neuronal” (segundo Wei, 1998). São compostas por elementos simples (neurônios) que operam de forma paralela, e assim como na natureza, a função da rede é determinada pela maioria das conexões entre elementos.

Todos os neurônios artificiais que compõem as redes neurais realizam a mesma função que é executar a soma ponderada de suas entradas e uma transformação (linear ou não-linear) sobre este valor. A figura 5.4 mostra o modelo de um neurônio artificial.

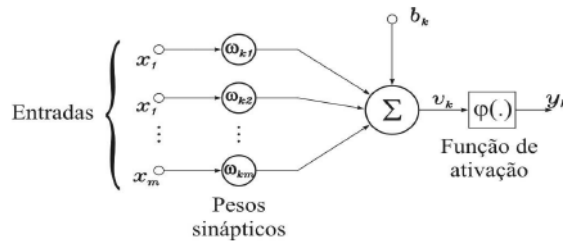


Figura 5.4 - Modelagem matemática de um neurônio artificial (Lopes, 2005).

Com base na figura acima podem ser distinguidos alguns elementos básicos do neurônio artificial:

- i. Sinapse: Cada neurônio k possui uma sinapse em que os sinais provenientes de outros neurônios ou da camada de entrada da rede são multiplicados por um peso específico. Assim, cada entrada x_j da sinapse é multiplicada pelo peso $w_{k,j}$.
- ii. Somatório: As entradas ponderadas são somadas, podendo ser adicionado um valor de polarização b_k , resultando no sinal de saída v_k , dado por,

$$v_k = b_k + \sum_{j=1}^m w_{k,j} \cdot x_j \quad . \quad (5.24)$$

- iii. Limiar (*threshold*, θ_k): Sua função é controlar a intensidade da função de ativação. A soma v_k é comparada a um limiar θ_k , se o valor de v_k for menor que esse limiar a saída do neurônio será inibida, em caso contrário ficará ativa.
- iv. Função de ativação ϕ_k : Funciona como um limitante para a amplitude de saída do neurônio, que é definido pela função escolhida.

v. Saída : Representada por y_k , sendo dada por,

$$y_k = \varphi(v_k - \theta_k) \quad . \quad (5.25)$$

5.3.2 Funções de Ativação

A função de ativação é a função transferência da saída do neurônio. Existem três tipos básicos de função de ativação e serão descritos a seguir:

- i. Função de limiar: é uma função degrau, utilizada em redes Perceptron, gerando saídas discretas, dada por,

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1, v \geq 0 \\ 0, v < 0 \end{cases} \quad . \quad (5.26)$$

- ii. Função linear: aplica a constante real a ao sinal de entrada v , sendo dada por,

$$\phi(v) = a \cdot v, a \in \mathbb{R} \quad . \quad (5.27)$$

- iii. Função Sigmóide: é uma função não-linear, contínua, monótona, e derivável. A função de transferência sigmóide transforma os valores da entrada, que podem ter estar entre $+\infty$ e $-\infty$, em valores de saída no intervalo de 0 a 1, sendo definida por,

$$\varphi(v) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha \cdot v}} \quad . \quad (5.28)$$

em que α é o parâmetro de inclinação da função. As funções de ativação descritas acima apresentam seus resultados no intervalo de zero a um. Porém muitas aplicações necessitam de parâmetros entre -1 e 1, para isso são utilizadas funções ímpares para a função degrau e função sigmóide. A função ímpar correspondente à função sigmóide é a função tangente hiperbólica, também chamada de tangente sigmóide (Lopes, 2005). Na figura 5.5 estão mostradas as funções de ativação limiar, linear, sigmóide e tangente sigmóide.

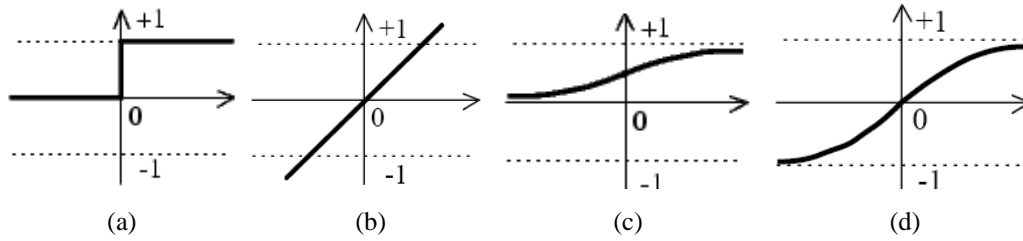


Figura 5.5 – (a) Função de ativação de limiar; (b) Função de ativação linear; (c) Função de ativação sigmóide; (d) Função de ativação tangente sigmóide (Demuth & Beale, 2000).

5.3.3 Topologias

Uma rede neural é formada por uma ou mais camadas. As camadas internas são chamadas de ocultas e cada camada pode ser formada por vários neurônios em paralelo. As diversas topologias de RNAs existentes podem ser agrupadas em duas classes: recorrentes e não-recorrentes. Nas RNAs não-recorrentes a informação recebida na entrada se propagada unidirecionalmente pelas camadas (modelo determinístico), enquanto nas RNAs recorrentes a informação é retro-propagada (modelo dinâmico). Nas RNAs recorrentes as saídas são realimentadas com as entradas o que torna suas saídas atuais dependentes das entradas atuais e das saídas anteriores.

Nas RNAs não-recorrentes as conexões entre neurônios são feitas unicamente entre neurônios de camadas consecutivas, enquanto em RNAs recorrentes os neurônios são conectados entre camadas consecutivas e não-consecutivas, gerando interconexões muito mais complexas que as RNAs não-recorrentes. A figura 5.6 mostra uma RNA recorrente com três camadas (Lopes, 2005).

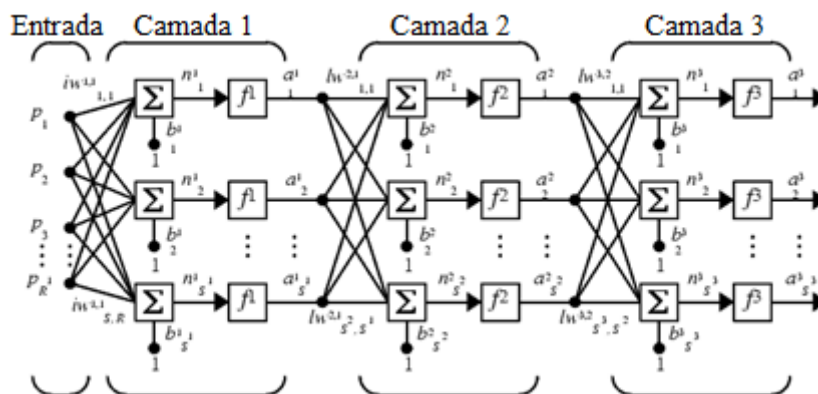


Figura 5.6 – RNA recorrente com três camadas (adaptado de Demuth & Beale, 2000).

5.3.4 Aprendizagem

Uma regra de aprendizagem é definida como um procedimento para modificar os pesos e as polarizações de uma rede, também é chamado de algoritmo de treinamento. As regras de aprendizagem se dividem em aprendizagem supervisionada e aprendizagem não-supervisionada.

Na aprendizagem supervisionada é fornecido um conjunto de treinamento que contém pares de entrada e saída desejada (alvo). Enquanto as entradas são aplicadas à rede, as saídas são comparadas aos alvos, o erro calculado é realimentado através da rede e a regra de aprendizagem define um método para ajustar os pesos e as polarizações que minimizem o erro (figura 5.7).

Na aprendizagem não-supervisionada, é fornecido apenas o conjunto de treino sem a saída desejada. O conjunto de treinamento modifica os pesos da rede de forma a produzir saídas consistentes, isto é, tanto a apresentação de um dos vetores de treinamento, como a apresentação de um vetor suficientemente similar irão produzir o mesmo padrão de saídas (Lopes, 2005).

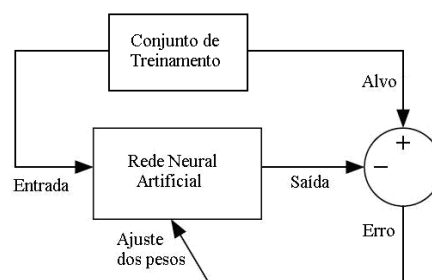


Figura 5.7 – Arquitetura de RNAs com aprendizado supervisionado.

5.3.5 Rede Perceptron multicamadas

A rede perceptron com uma camada é uma rede simples que só é capaz de classificar padrões linearmente separáveis. Quando o problema em questão envolve padrões não-lineares é necessário utilizar redes perceptron multicamadas. As redes perceptron multicamadas são redes não-recorrentes, ou seja, a informação se propaga unidirecionalmente da camada de entrada para a camada de saída. Seu treinamento é supervisionado e geralmente utiliza o algoritmo de retro-propagação do erro (backpropagation) (Demuth & Beale, 2000).

O desempenho da RNA está vinculado ao número de camadas e o número de neurônios de cada camada. Porém, inicialmente não se conhece o número ótimo desses parâmetros, então, usualmente se incrementa gradualmente o número de camadas e o número de neurônios de cada camada, procurando o melhor desempenho durante o treinamento da rede. Esses parâmetros não são aumentados indefinidamente, pois o tempo envolvido com o treinamento da rede e o cálculo da resposta aumentam significativamente.

5.3.6 Algoritmo de aprendizagem backpropagation

Uma vez que a rede foi criada, os valores de seus pesos, b_k , e polarizações, $w_{k,j}$, são iniciados com valores aleatórios, que devem estar contidos no intervalo abrangido pela função de ativação. A rede pode ser treinada para aproximação de funções (regressão não-linear), associação de padrões e classificação de padrões (Demuth & Beale, 2000). Durante o treinamento os pesos e polarizações são ajustados iterativamente para minimizar a função de desempenho da rede neural. Em redes não-recorrentes a função de desempenho mais utilizada é o erro quadrático médio (*mse*, do inglês, *mean square error*), que normalmente é definida como a média da soma dos quadrados dos erros ocorridos durante o treinamento, como mostra a equação abaixo,

$$F = mse = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (e_i)^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (t_i - a_i)^2 . \quad (5.29)$$

em que e_i é erro encontrado na saída do neurônio i ; N é o número de erros; t_i é o valor esperado para a saída do neurônio i , contido no conjunto de treinamento e a_i é o valor encontrado na saída do neurônio i .

Todos os algoritmos utilizam o gradiente da função de desempenho para ajustar os pesos e minimizar o erro. O gradiente é determinado usando o algoritmo backpropagation, que envolve o cálculo de iterações retroativas, isto é, no sentido da camada de saída para a camada de entrada da rede. O algoritmo backpropagation foi criado para a aprendizagem de redes multicamadas com funções de transferência não-lineares e diferenciáveis. As redes com polarizações, uma camada sigmóide, e uma camada linear de saída são capazes de aproximar toda função que possui um número finito de descontinuidades. A descrição de uma iteração do algoritmo básico de

treinamento backpropagation, em que os pesos são movidos no sentido negativo do gradiente, é dada por,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \cdot \mathbf{g}_k . \quad (5.30)$$

em que \mathbf{x}_k é o vetor que contém os pesos, b_k , e polarizações, $w_{k,j}$, atuais da rede, α_k é a taxa de aprendizagem e \mathbf{g}_k é o gradiente atual. A velocidade de convergência pode ser aumentada, ou seja, diminuir o número de iterações necessárias para se alcançar o mínimo erro quadrático médio pré-determinado. Para isso se introduz na equação 5.30 um multiplicador chamado *momentum*. O *momentum* permite que uma rede responda não somente ao gradiente local, mas também às tendências recentes na curva de erro, permitindo que a rede ignore os mínimos locais, encontrando o mínimo absoluto da curva de erro (Demuth & Beale, 2000).

5.3.7 Otimização da generalização

Um dos problemas que ocorre durante o treinamento da rede neural é chamado *overfitting*. Durante o treinamento a rede converge para valores pequenos de erro, mas quando dados novos são apresentados à rede o erro é grande. Significa que a rede memorizou os exemplos do treinamento, mas não aprendeu a generalizar para situações novas. Um método para melhorar a generalização é usar uma rede que seja grande o suficiente para fornecer um ajuste adequado. Quanto maior a rede usada, mais complexas são as funções que ela pode criar. Se utilizarmos uma rede pequena, ela só conseguirá decorar exemplos. Porém, não há como saber de antemão o tamanho da rede necessário para que não ocorra *overfitting*.

Se o número de parâmetros da rede é muito menor que o número total de pontos do conjunto de treinamento, a possibilidade de ocorrer *overfitting* é muito pequena. Assim, a primeira solução é coletar mais dados para aumentar o conjunto de treinamento. Porém, quando se usa um banco de dados limitado e não existe a possibilidade de aumentar o conjunto de treinamento, são utilizadas técnicas para prevenir o *overfitting*. Uma técnica comum é chamada regularização (Demuth & Beale, 2000).

5.3.8 Regularização

Esta técnica envolve a modificação da função de desempenho normalmente definida pela equação 5.30. É adicionado um termo que consiste na média da soma dos quadrados das polarizações e pesos da rede, dados por,

$$msereg = \gamma \cdot mse + (1 - \gamma)msw \quad . \quad (5.31)$$

em que γ é a taxa de desempenho e msw é definido como

$$msw = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \mathbf{w}_j^2 \quad . \quad (5.32)$$

em que \mathbf{w}_j é o vetor que contém os valores das polarizações das entradas j do neurônio e n é o número de vetores de pesos e polarizações da rede. Usando a função de desempenho descrita acima, a rede possuirá valores menores de pesos e polarizações, e isso força a saída da rede a variar menos, assim, a curva de erro será mais lisa, sendo menos provável que o algoritmo se prenda a um mínimo local da curva, ocasionando o *overfitting*.

O problema da regularização é a dificuldade em determinar o valor ótimo da taxa de desempenho. Se esse parâmetro for muito grande, ocorrerá *overfitting*. Se γ for muito pequeno a rede não ajustará os dados adequadamente. Para resolver esse problema descreveremos uma rotina utilizada para encontrar os valores da regularização automaticamente (Demuth & Beale, 2000).

5.3.9 Regularização automática

É um algoritmo baseado na estrutura bayesiana de David MacKay. Nesta estrutura, os pesos e as polarizações da rede são supostos como variáveis aleatórias com distribuições especificadas. Os parâmetros da regularização são relacionados à variações desconhecidas, mas essas variações apresentam distribuições conhecidas. Então, pode-se estimar estes parâmetros usando técnicas estatísticas. A regularização bayesiana foi implementada no algoritmo de treinamento de RNAs: *trainbr*, da plataforma de programação MATLAB®. Esse algoritmo geralmente apresenta melhor desempenho

quando as entradas e saídas estão escaladas nos valores entre -1 e 1 (Demuth & Beale, 2000).

As RNAs utilizadas nessa pesquisa são perceptrons multicamadas com algoritmo de aprendizado *trainbr*, que pertence à classe de aprendizagem supervisionada com retro-propagação de erro. As redes possuem três camadas, em que a primeira camada é a entrada do sinal, a segunda camada possui função de ativação tangente sigmóide e a terceira camada possui função de ativação degrau ímpar. A camada de saída possui dois neurônios gerando combinações binárias para representar os padrões referentes à imaginação de movimento da mão direita ou esquerda. A camada de entrada possui o mesmo número de neurônios do vetor de entrada utilizado. Na camada intermediária variou-se o número de neurônios de 1 a 10, para assim, escolher qual das 10 redes apresentou melhor desempenho.

Capítulo 6 : Materiais e Métodos

Neste capítulo primeiramente descreveremos a organização do banco de dados utilizado para o experimento. São realizados testes para visualização das características ERD/ERS no banco de dados, que estão relacionadas à execução das tarefas mentais e confirmam a possibilidade de identificação das mesmas através do sinal de EEG. Nas seções posteriores descreveremos a aplicação do método de Separação Linear de Fontes e os resultados obtidos com os diversos classificadores de padrões.

6.1 Banco de dados

O banco de dados utilizado foi fornecido por José R. Millán e Silvia Chiappa do instituto de pesquisa IDIAP (Suíça) para a 3ª competição internacional de interfaces cérebro-computador (BCI competition III) em junho de 2005 (Millán, 2004). Este banco de dados contém gravações de EEG de 3 indivíduos normais durante 4 sessões sem realimentação, ou seja, o indivíduo executa as tarefas mentais sem realimentação sobre o sinal de EEG que está gerando, de forma que não há possibilidade de auto-regulação de alguma característica do EEG. Os indivíduos se sentaram em cadeiras normais, com os braços relaxados e mãos apoiadas sobre as pernas e executaram aleatoriamente 3 tarefas mentais pré-determinadas:

- i. Imaginação repetitiva do movimento da mão esquerda, rotulada como classe 2;
- ii. Imaginação repetitiva do movimento da mão direita, rotulada como classe 3;
- iii. Geração de palavras começando com uma mesma letra aleatória, rotulado como classe 7.

Todas as 4 sessões de um dado indivíduo foram adquiridas no mesmo dia, cada sessão possui duração aproximada de 4 minutos com 5 a 10 minutos de intervalo entre as sessões. O indivíduo executou uma dada tarefa mental por aproximadamente 20 segundos e, então, mudou aleatoriamente para outra tarefa mental a pedido do operador. A gravação de EEG não está dividida em épocas, porque os indivíduos estão executando continuamente uma das tarefas mentais (Figura 6.1).

Os sinais de EEG foram gravados com o sistema Biosemi utilizando uma touca com 32 eletrodos localizados nas posições do padrão 10-20. A taxa de amostragem do

sinal foi de 512 Hz e não foi utilizado nenhum método de extração ou correção de artefatos.

Dentre as 4 sessões somente 3 estão rotuladas, dado que o banco de dados foi obtido de uma competição, as 3 primeiras sessões são fornecidas com os respectivos rótulos para o treinamento dos classificadores e a última sessão é utilizada para teste. Então, os candidatos do BCI competition III enviam os códigos de seus classificadores para os organizadores da competição que calcularão a taxa de acerto dos classificadores testados na quarta sessão.

No presente estudo somente serão utilizadas as sessões rotuladas de cada indivíduo, ou seja, as 3 primeiras sessões, porque são necessários os rótulos tanto para o treinamento dos classificadores quanto para a verificação das taxas de acerto.

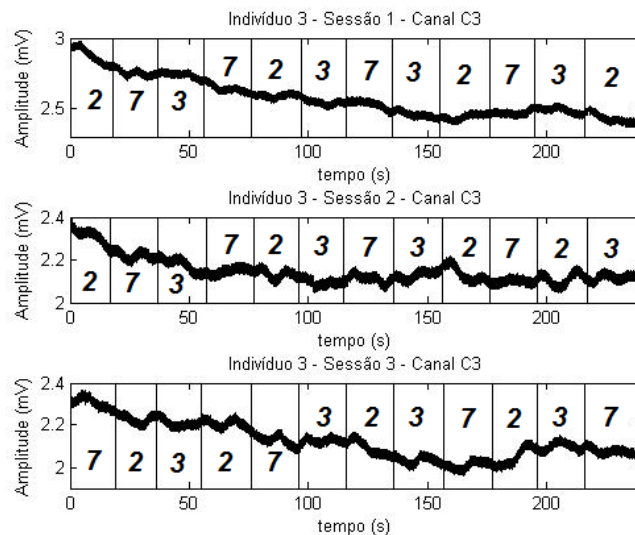


Figura 6.1 – Sinais de EEG das três primeiras sessões do indivíduo 3, canal C3.

6.2 ERD no banco de dados

Investigou-se a presença de ERD no banco de dados, utilizando os dois métodos apresentados na sessão 3.10, o método clássico de energia instantânea da banda de frequências e o método IV (*Intertrial Variance*) que calcula a variância instantânea da energia da banda de frequências entre as sessões.

Nesse intuito, o EEG de cada sessão gravado continuamente foi dividido em épocas de 20 segundos contendo apenas uma tarefa mental. Considerando o total das 3 sessões, cada indivíduo realizou uma tarefa mental aproximadamente 12 vezes, resultando em 12 épocas para cada tarefa mental. Como cada época tem duração

aproximada de 20 s e o sinal foi captado a uma taxa de amostragem de 512 Hz, então existem aproximadamente 10240 amostras para cada época, de forma que utilizaremos a nomenclatura, $x(i, j)$, para representar a amostra j da época i , em que o índice i varia entre $(i = 1, 2, \dots, 12)$, e o índice varia entre $(j = 1, 2, \dots, 10240)$. E utilizaremos a notação, $f_\mu(i, j)$, para representar a amostra j da época i do EEG filtrado na banda μ . O EEG foi gravado utilizando 32 canais, mas para simplificar a notação, o cálculo do ERD considerará $x(i, j)$ como o sinal de EEG de um canal qualquer.

O ERD foi calculado para as tarefas mentais de imaginação motora separadamente para cada época do indivíduo 3, e foi realizada a média dos ERDs calculados nas épocas. De acordo com o primeiro método exposto na sessão 3.10, para cada época, calcula-se a energia, $e_\mu(i, j)$, do sinal filtrado na banda μ , $f_\mu(i, j)$. As amostras do sinal de EEG de uma época são filtradas na banda μ e elevadas ao quadrado, obtendo a energia que também está em função do tempo. Então, calcula-se a média dos sinais de energia de todas as 12 épocas, obtendo $\bar{e}_\mu(j)$.

Para obter os valores percentuais do ERD, o procedimento mencionado é realizado para um período de referência com duração de 1 s, cuja energia média é \bar{r}_μ . O período de referência é tomado como uma janela de tempo de 1 s inicial de cada época, em que a tarefa mental está por começar, pois existe um atraso entre a comunicação do operador para que o sujeito inicie a tarefa mental, e o efetivo início da tarefa.

Então, a energia média dos sinais filtrados de todas as épocas, $\bar{e}_\mu(j)$, é comparada, de forma percentual, com a energia média dos sinais filtrados do período de referência, \bar{r}_μ , através da equação 3.1, reescrita como,

$$\mathbf{ERD}_{\%}(j) = \frac{(\bar{e}_\mu(j) - \bar{r}_\mu)}{\bar{r}_\mu \times 100} . \quad (6.1)$$

A figura 6.2 mostra o ERD percentual calculado com o método clássico (método i). Na esquerda e no centro estão mostrados o ERD percentual em função do tempo, isto é, o ERD calculado para cada amostra j pela equação (6.1). Na coluna à esquerda está mostrado o ERD médio de todas as épocas, $\mathbf{ERD}_{\%}(j)$, durante as tarefas mentais de imaginação de movimento da mão esquerda (Classe 2) e direita (Classe 3) para o canal C3, sobre o córtex motor do hemisfério cerebral esquerdo. Na coluna central está mostrado o ERD médio, $\mathbf{ERD}_{\%}(j)$, durante as tarefas mentais de imaginação de

movimento da mão esquerda e direita para o canal C4, sobre o córtex motor do hemisfério cerebral direito. As linhas pontilhadas mostram a média temporal de $ERD_{\%}(j)$, nomeado $\overline{ERD}_{\%}$. O gráfico de barras na coluna à direita compara os valores de $\overline{ERD}_{\%}$ dos canais C3 e C4 durante uma mesma tarefa mental.

No gráfico de barras superior podemos verificar que para a realização da tarefa mental de imaginação de movimento da mão direita, o $\overline{ERD}_{\%}$ do canal C3 é menor que o $\overline{ERD}_{\%}$ do canal C4. Isto indica que a energia média da banda μ do canal C3 é menor que a energia média da banda μ do canal C4, conforme o esperado, já que a imaginação de movimento da mão direita provocará uma diminuição na energia média da banda μ no córtex motor do hemisfério esquerdo. A confirmação do ERD no banco de dados também mostra que a realização contínua de uma tarefa mental, provoca ERDs consecutivos, que podem ser verificados em sua atividade média.

No gráfico de barras inferior podemos verificar que para a realização da tarefa mental de imaginação de movimento da mão esquerda, o $\overline{ERD}_{\%}$ do canal C4 é menor que o $\overline{ERD}_{\%}$ do canal C3. Isto indica que a energia média da banda μ do canal C4 é menor que a energia média da banda μ do canal C3, conforme o esperado, já que a imaginação de movimento da mão esquerda provocará uma diminuição na energia média da banda μ no córtex motor do hemisfério direito. Sendo que a diferença entre a energia dos canais está em torno de 10%.

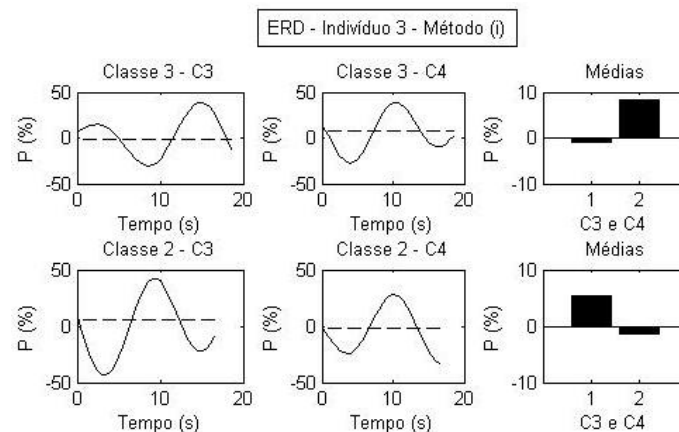


Figura 6.2 –ERD do indivíduo 3 calculado utilizando o método clássico para a imaginação de movimento da mão esquerda (Classe 2) e direita (Classe 3). Esquerda: ERD em função do tempo para o eletrodo C3; Centro: ERD em função do tempo para o eletrodo C4; Direita: ERD médio dos canais C3 e C4 durante a janela de 20 segundos.

De acordo com o segundo método exposto na sessão 3.10, o método IV (*Intertrial Variance*), para cada época do indivíduo 3, calculou-se a energia do sinal

filtrado na banda μ , $f_{\mu}(i, j)$, sendo representada por $e_{\mu}(i, j)$. Em que o índice i representa a época, e o índice j representa a amostra da época. Então, calculou-se a média de cada amostra de $e_{\mu}(i, j)$ em relação à todas as épocas, obtendo a energia de uma época média, $\bar{e}_{\mu}(j)$. E calcula-se a variância entre as amostras das épocas, através da equação 3.2, reescrita como,

$$IV(j) = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N \left(e_{\mu}(i, j) - \bar{e}_{\mu}(j) \right)^2 . \quad (6.2)$$

em que N é o número total de épocas. Da mesma forma, o ERD é definido como os valores percentuais de decremento em relação a um período de referencia. Nesse caso o período de referencia é formado pelas variâncias das amostras em um período anterior ao evento, que corresponde à janela de 1 s inicial das épocas, e o parâmetro \bar{r}_{μ} da equação (6.1) será a média das variâncias das amostras nesse período.

A figura 6.3 mostra o ERD percentual calculado com o método IV. Na coluna à esquerda está mostrado o $ERD_{\%}(j)$ em função do tempo durante as tarefas mentais de imaginação de movimento da mão esquerda e direita para o canal C3. Na coluna central está mostrado o $ERD_{\%}(j)$ durante as tarefas mentais de imaginação de movimento da mão esquerda e direita para o canal C4. As linhas pontilhadas mostram a média temporal $\overline{ERD}_{\%}$ e o gráfico de barras na coluna à direita compara os valores de $\overline{ERD}_{\%}$ dos canais C3 e C4 durante uma mesma tarefa mental.

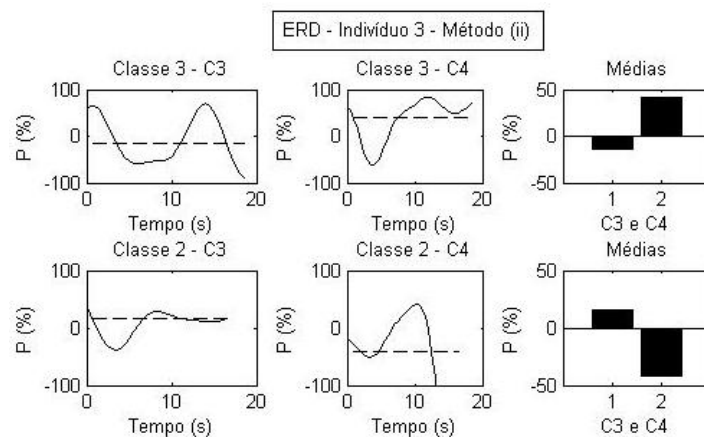


Figura 6.3 – ERD do indivíduo 3 utilizando o método IV para a imaginação de movimento da mão esquerda (Classe 2) e direita (Classe 3). Esquerda: ERD em função do tempo para o eletrodo C3; Centro: ERD em função do tempo para o eletrodo C4; Direita: ERD médio dos canais C3 e C4 durante a janela de 20 segundos.

No gráfico de barras superior podemos verificar que para a realização da tarefa mental de imaginação de movimento da mão direita, o $\overline{ERD}_{\%}$ do canal C3 é menor que o $\overline{ERD}_{\%}$ do canal C4. Isto indica que a energia média da banda μ do canal C3 é menor que a energia média da banda μ do canal C4, conforme o esperado, já que a imaginação de movimento da mão esquerda provocará uma diminuição na energia média da banda μ no córtex motor do hemisfério esquerdo. Sendo que a diferença entre a energia dos canais está em torno de 60%.

No gráfico de barras inferior podemos verificar que para a realização da tarefa mental de imaginação de movimento da mão esquerda, o $\overline{ERD}_{\%}$ do canal C4 é menor que o $\overline{ERD}_{\%}$ do canal C3. Isto indica que a energia média da banda μ do canal C4 é menor que a energia média da banda μ do canal C3, conforme o esperado, já que a imaginação de movimento da mão direita provocará uma diminuição na energia média da banda μ no córtex motor do hemisfério direito. Sendo que a diferença entre a energia dos canais está em torno de 60%.

Como para ambos gráficos de barras da figura 6.3, a diferença entre a energia dos canais está em torno de 60%, e para o método clássico ambos gráficos de barras mostram uma diferença de energia em torno de 10%, então, o método IV torna o ERD mais perceptível.

6.3 Aplicação da SLF no banco de dados

Nesta seção, mostraremos a aplicação da SLF no banco de dados. Os sinais desse banco de dados foram gravados por 32 eletrodos posicionados no sistema 10-20 (Figura 6.4 - Esquerda), dessa forma, para obter uma separação de fontes mais eficaz, utilizamos os sinais de todos os eletrodos e supomos existir 32 fontes cerebrais na região cortical abaixo de cada eletrodo, constituindo um sistema com 32 equações lineares.

Dessa forma podemos formular um sistema linear com 32 equações. Todos os eletrodos e fontes cerebrais estão posicionados em um mesmo plano euclidiano. O plano euclidiano foi discretizado em uma malha com distâncias horizontais e verticais iguais a d , então os eletrodos e conseqüentemente as fontes cerebrais, foram mapeados em relação a nós da malha (Figura 6.4 - Direita). O cálculo de todas as distâncias euclidianas entre todos os eletrodos envolve 1024 (32×32) distâncias, que serão utilizados para o cálculo das 1024 atenuações, pois sinal de cada fonte se espalha por

Em notação matricial, temos que,

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{2,1} & \cdots & a_{32,1} \\ a_{1,2} & 1 & \cdots & a_{32,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,32} & a_{2,32} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{32} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{2,1} & \cdots & a_{32,1} \\ a_{1,2} & 1 & \cdots & a_{32,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,32} & a_{2,32} & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{32} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{E} . \quad (6.5)$$

Portanto, definindo os valores das distâncias d e b , e resolvendo um procedimento simples de inversão de matriz, são obtidos os sinais emitidos pelas fontes cerebrais a partir do sinal medido sob o escalpo. Para realizar o método SLF assumimos que a distância d entre cada ponto da malha possui valor unitário, assim como a distancia entre as cargas do dipolo, b . A figura 6.5 mostra a aplicação da separação linear de fontes no sinal de EEG do canal C3 do indivíduo 1 durante a sessão 1 do banco de dados.

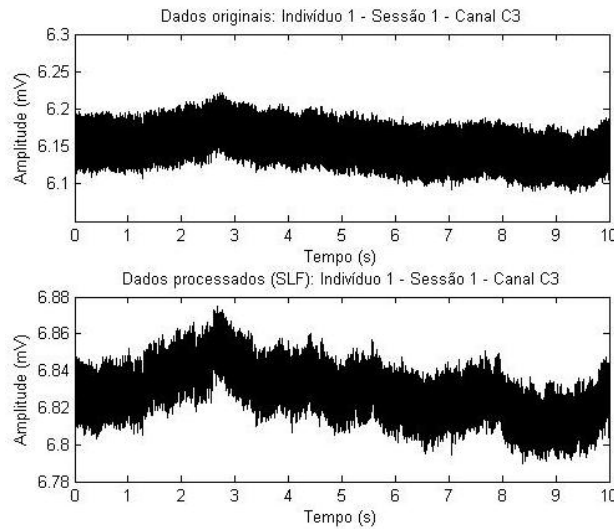


Figura 6.5 – Gráfico superior: Sinal de EEG obtido no canal C3; Gráfico inferior: O mesmo Sinal de EEG, porém processado pelo método de separação linear de fontes.

Durante o processo de classificação das tarefas mentais, percebemos que utilizar a raiz quadrada do denominador da equação 6.3, melhorou a taxa de acerto do classificador baseado em regras. Então, processamos o EEG do banco de dados por dois métodos: o método apresentado acima, que foi denominado SLF-1 e o novo método, que foi denominado SLF-2. Para o método SLF-2, o cálculo da atenuação é dado por,

$$a_{ij} = \frac{b^3}{(d_{ij}^2 + b^2)^{3/4}} \quad . \quad (6.6)$$

6.4 Características do sinal de EEG utilizadas para classificação das tarefas mentais

O padrão ERD/ERS é um método capaz de distinguir a lateralidade da imaginação de movimento das mãos, porém são necessárias várias sessões para que possamos identificar o padrão ERD. Durante a classificação em tempo real somente dispomos de um curto período de tempo em uma única gravação de EEG para classificar a tarefa mental realizada. Se existe o padrão ERD no sinal de EEG, uma análise das componentes espectrais realizada em pequenas janelas de tempo deverá mostrar uma queda na amplitude das componentes espectrais da banda de interesse à medida que ocorre o ERD no domínio do tempo. Sabemos que o ERD é dificilmente medido em uma única gravação de EEG e da mesma forma, dificilmente veremos a queda na amplitude das componentes espectrais da banda, em uma única gravação de EEG. Para isso utilizamos a separação linear de fontes no sinal e comparamos os espectros de amplitude do sinal processado e do sinal original.

Assim, um sistema pode detectar o padrão ERD/ERS de um MRP em tempo real e comandar sistemas robóticos ou computacionais a partir de intenções de movimento. No capítulo 3 foram mostradas algumas formas de representação da transformada de Fourier aplicada em janelas, e nas análises posteriores optamos pela visualização do espectro de amplitude no espaço tridimensional, de forma a representar as variações de amplitude, tempo e frequência no mesmo gráfico.

Analisaremos o sinal de EEG da sessão 1 do indivíduo 3 durante a transição de 2 tarefas mentais. Primeiro analisaremos a transição da tarefa mental de geração de palavras para a tarefa mental de imaginação de movimento da mão direita e depois para a transição da tarefa mental de geração de palavras para a tarefa mental de imaginação de movimento da mão esquerda.

Utilizamos uma janela de 10 s durante a transição das tarefas mentais. A janela contém os 5s finais de uma tarefa mental e os 5 s iniciais da outra tarefa mental. Foi escolhida a transição das tarefas mentais iniciando com a tarefa mental de geração de palavras porque o córtex motor não é utilizado durante essa tarefa mental, e podemos considerar como um período de referência em que o córtex motor está em repouso.

Utilizamos esse período de referência para compararmos a energia das componentes espectrais durante a realização da tarefa mental de imaginação motora.

Na figura 6.6 está representado o sinal de EEG do canal C3 do indivíduo 3 durante a sessão 1, e parte sombreada da figura indica a janela de tempo de 10 s. Nessa janela de tempo, o sujeito realizou a tarefa mental de geração de palavras durante os 5 primeiros segundos e depois realizou a tarefa mental de imaginação de movimento da mão direita durante os 5 segundos finais, como indicado nos rótulos.



Figura 6.6 – Janela de tempo abrangendo a tarefa mental de geração de palavras e imaginação de movimento da mão direita.

Como dissemos na seção 3.10, o MRP e o ERD são contralaterais, portanto, para a tarefa mental de imaginação de movimento da mão direita ocorre um ERD na banda μ no córtex motor primário do hemisfério cerebral esquerdo, que é medido pelo eletrodo C3. Então nessa janela de tempo, esperamos observar uma queda na amplitude das componentes espectrais da banda μ , nos 5 s finais do sinal de EEG medido no canal C3.

Todos os gráficos (amplitude \times tempo \times frequência) mostrados na figura 6.7 são espectros de amplitude tridimensionais referentes ao sinal obtido na janela de tempo sombreada da figura 6.6. A figura 6.7 (a) mostra o espectro de amplitude do sinal de EEG do canal C3. A figura 6.7 (b) mostra o espectro de amplitude do sinal de EEG do canal C3 filtrado na banda μ e não é visível nenhuma queda significativa na amplitude das componentes espectrais posteriores à $t = 5$ segundos. A figura 6.7 (c) mostra o espectro de amplitude do sinal de EEG do canal C3 processado pelo método SLF. A figura 6.7 (d) mostra o espectro de amplitude do sinal de EEG do canal C3 filtrado na banda μ e processado pelo método SLF e existe claramente uma queda na amplitude das componentes espectrais centralizadas em $t = 6$ segundos, conforme esperado.

Observa-se, então que o uso de método SLF permite a visualização relativa do ERD da tarefa mental de imaginação de movimento da mão direita no sinal de EEG, através da comparação da amplitude das componentes espectrais durante uma única gravação de EEG.

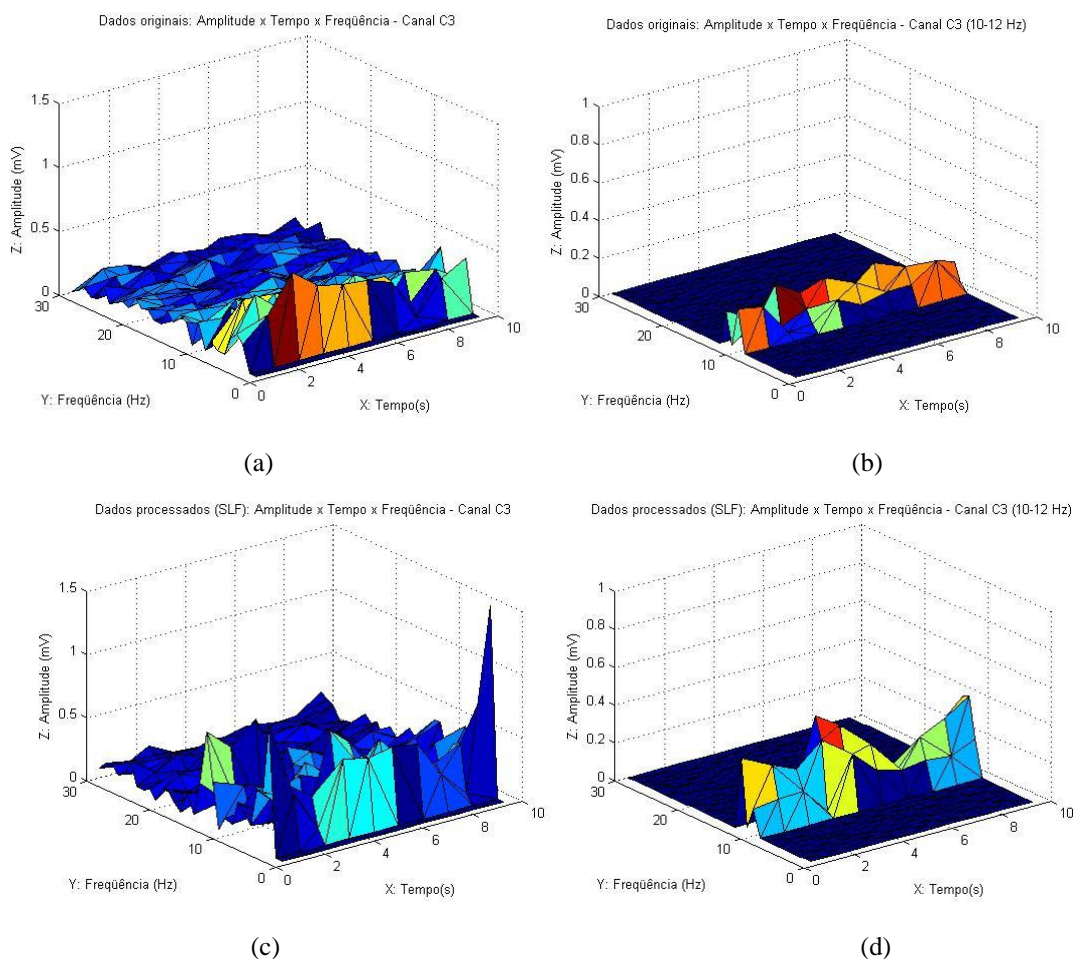


Figura 6.7 – (a) espectro de amplitude do canal C3; (b) espectro de amplitude do canal C3 filtrado na banda μ ; (c) espectro de amplitude do canal C3 processado por SLF; (d) espectro de amplitude do canal C3 processado por SLF e filtrado na banda μ .

Na figura 6.8 está representado o sinal de EEG do canal C3 do indivíduo 3 durante a sessão 1, e parte sombreada da figura indica a janela de tempo de 10 s. Nessa janela de tempo, o sujeito realizou a tarefa mental de geração de palavras durante os 5 primeiros segundos e depois realizou a tarefa mental de imaginação de movimento da mão esquerda durante os 5 segundos finais.



Figura 6.8 – Janela de tempo abrangendo a tarefa mental de geração de palavras e imaginação de movimento da mão esquerda.

Para a tarefa mental de imaginação de movimento da mão esquerda ocorre um ERD na banda μ no córtex motor primário do hemisfério cerebral direita, que é medido pelo eletrodo C4. Então nessa janela de tempo, a queda na amplitude das componentes espectrais da banda μ , nos 5s finais do sinal de EEG deverá ocorrer no canal C4.

Todos os gráficos (amplitude \times tempo \times frequência) mostrados na figura 6.9 são espectros de amplitude tridimensionais referentes ao sinal obtido na janela de tempo sombreada da figura 6.8.

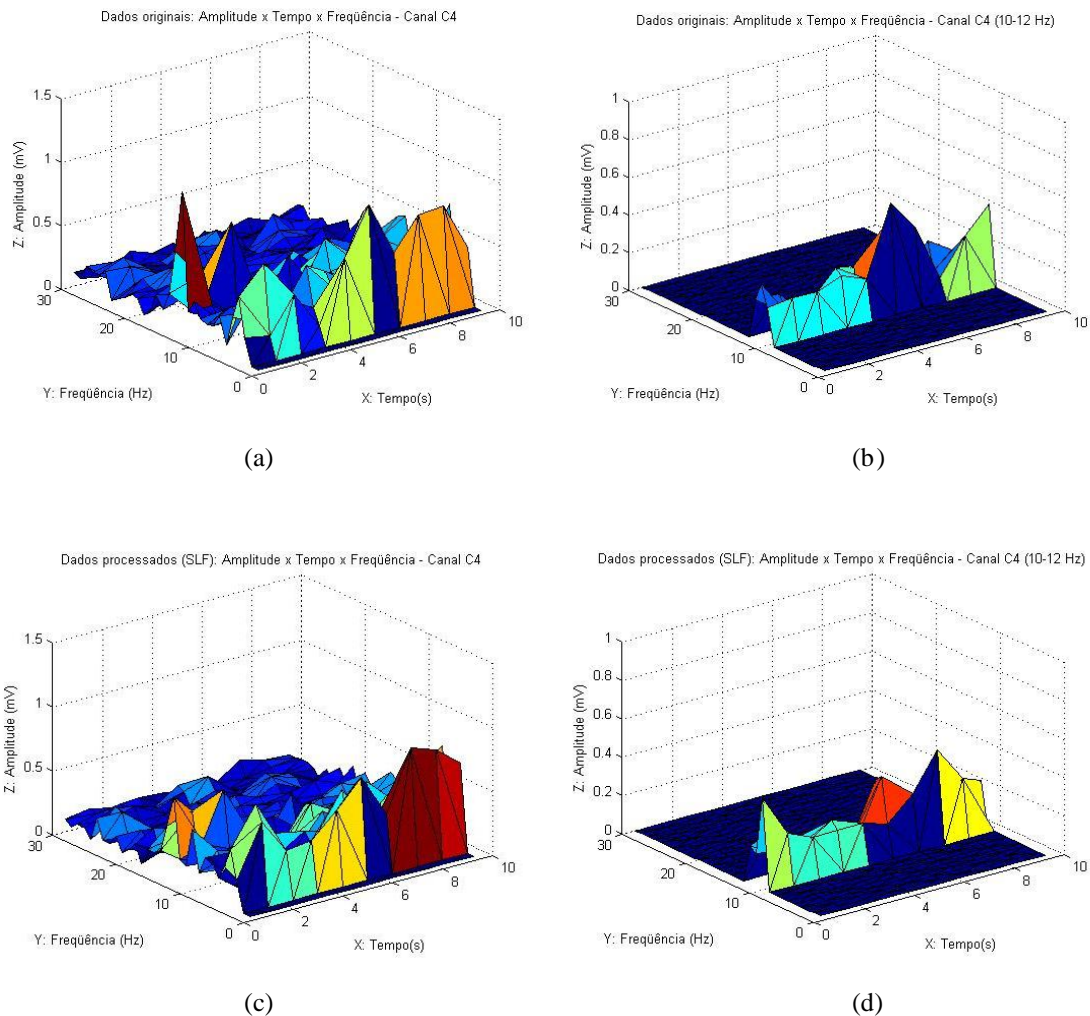


Figura 6.9 – (a) espectro de amplitude do canal C4; (b) espectro de amplitude do canal C4 filtrado na banda μ ; (c) espectro de amplitude do canal C4 processado por SLF; (d) espectro de amplitude do canal C4 processado por SLF e filtrado na banda μ .

A figura 6.9 (a) mostra o espectro de amplitude do sinal de EEG do canal C4. A figura 6.9 (b) mostra o espectro de amplitude do sinal de EEG do canal C4 filtrado na banda μ e não é visível nenhuma queda significativa na amplitude das componentes espectrais posteriores à $t = 5$ segundos. A figura 6.9 (c) mostra o espectro de amplitude

do sinal de EEG do canal C4 processado pelo método SLF. A figura 6.9 (d) mostra o espectro de amplitude do sinal de EEG do canal C4 filtrado na banda μ e processado pelo método SLF e também não é visível nenhuma queda significativa na amplitude das componentes espectrais posteriores à $t = 5$ segundos.

Esse fato foi abordado na seção 3.10 e corresponde à lateralização do hemisfério esquerdo, e mostra que a queda na amplitude das componentes espectrais é mais difícil de ser medida durante a imaginação de movimento da mão esquerda.

6.5 Classificador baseado em regras de decisão

No banco de dados estudado existem 3 sessões de EEG previamente rotuladas para cada um dos 3 indivíduos. Em cada sessão o indivíduo executou 3 tarefas mentais distintas, de forma que existem 3 classes, $S=[C_1, C_2, C_3]$. C_1 representa a classe de intenção de movimento da mão esquerda, C_2 representa a classe de intenção de movimento da mão direita e C_3 representa a classe de imaginação de palavras que comecem com a mesma letra aleatória. A matriz $E_s(i, c)$ é formada pelos sinais de EEG de cada sessão s ($s=1,2,3$) e está em função do número de amostras i de cada sessão e do número de canais j utilizados ($c = 1,2, \dots, 32$).

Criamos um classificador com 2 regras, ou nós de decisão, que comparam a energia da banda μ dos eletrodos sobre o córtex motor primário (C3 e C4) e o eletrodo sobre a área de Broca (F7). Utilizamos a energia do eletrodo sobre a área de Broca porque assumimos que ocorre alguma variação de energia do EEG na área de broca durante a realização da tarefa mental de geração de palavras que comecem com uma mesma letra qualquer, da mesma forma que ocorre no córtex motor durante a tarefa mental de imaginação de movimento das mãos.

Sabemos que ocorre um ERD na banda α no córtex visual durante estímulos visuais e ocorre um ERD na banda μ no córtex motor durante a imaginação de movimento, então, supomos que também ocorre um ERD nessa banda de frequências na área de broca durante a tarefa mental de geração de palavras. Dessa forma, os sinais de EEG de todos os canais são filtrados na mesma banda de frequências.

Então, as regras do classificador são:

- i. Se a energia da banda μ do eletrodo C3 é menor que a energia da banda μ do eletrodo C4, e também é menor que a energia do sinal do eletrodo F7 filtrado

- entre 8 e 12 Hz, então ocorreu um ERD em C3 que corresponde à intenção de movimento da mão direita (Classe 3), do contrário vá para regra 2;
- ii. Se a energia da banda μ do eletrodo C4 é menor que a energia da banda μ do eletrodo C3, e também é menor que a energia do sinal do eletrodo F7 filtrado entre 8 e 12 Hz, então ocorreu um ERD em C4 que corresponde à intenção de movimento da mão esquerda (Classe 2). Caso contrário atribua a classe 7 (geração de palavras) ao sinal de EEG analisado, pois a energia do sinal do eletrodo F7 filtrado entre 8 e 12 Hz é menor que a energia da banda μ dos eletrodos C3 e C4 (Figura 6.10).

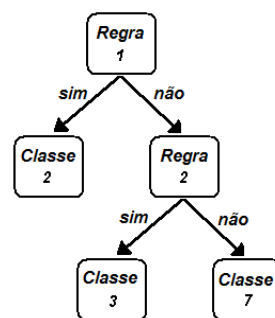


Figura 6.10 – Árvore de decisão do classificador baseado em regras.

O classificador baseado em regras não necessita de dados para treinamento e estimação de parâmetros, portanto todas as 3 sessões serão utilizadas para se verificar o desempenho do classificador. Como todas as sessões são previamente rotuladas podemos comparar o resultado obtido pelo classificador com o resultado pré-rotulado e assim calcular as taxas de acerto dos classificadores e as matrizes de confusão.

A estimação de parâmetros para as regras de classificação são realizadas em janelas de 1 s de sinal, simulando um processo de classificação em tempo real. Como mencionado anteriormente, as sessões de cada indivíduo possuem em média 12 tarefas mentais gravadas continuamente, como as tarefas mentais possuem em média 20 s, em cada sessão, existirão 240 janelas.

As características das classes são a energia média do sinal de EEG dos canais C3, C4 e F7 filtrados entre 8 e 12 Hz. As características são calculadas em janelas de 1 segundo e o sinal de EEG estudado foi adquirido a uma taxa de amostragem de 512 Hz, portanto, em cada janela de sinal existem 512 amostras ($\tau = 512$). O sinal de EEG de cada janela ω ($\omega = 1, 2, \dots, 240$) é dado por,

$$\mathbf{W}_s(\omega, 1: \tau, c) = \mathbf{E}_s((\omega - 1) \cdot \tau + 1: (\omega \cdot \tau), c), \begin{cases} \omega = 1, 2, \dots, 240 \\ c = 1, 2, \dots, 32 \end{cases} \quad (6.7)$$

O sinal de EEG da janela observada, ω , é filtrado na banda μ e elevado ao quadrado para se obter a energia do sinal, $\mathbf{e}_s(\omega, i, c)$. Então a energia média do sinal filtrado da janela ω i , $\bar{\mathbf{e}}_s(\omega, c)$, é calculada por,

$$\bar{\mathbf{e}}_s(\omega, c) = \frac{1}{\tau} \cdot \sum_{i=1}^{\tau} \mathbf{e}_s(\omega, i, c) . \quad (6.8)$$

A energia média de cada janela ω do canal C3 ($c = 8$) é dada por $\mathbf{C3}_s(\omega) = \bar{\mathbf{e}}_s(\omega, 8)$. A energia média de cada janela do canal C4 ($c = 23$) é dada por $\mathbf{C4}_s(\omega) = \bar{\mathbf{e}}_s(\omega, 23)$ e a energia média de cada janela do canal F7 ($c = 3$) é dada por $\mathbf{F7}_s(\omega) = \bar{\mathbf{e}}_s(\omega, 3)$. $\mathbf{C3}_s(\omega)$, $\mathbf{C4}_s(\omega)$ e $\mathbf{F7}_s(\omega)$ serão utilizados nas regras do classificador para cada janela de sinal, obtendo uma classificação por janela. Como existem 3 sessões com 240 janelas, totalizam 720 janelas para classificação para cada indivíduo.

Comparando os resultados obtidos pelo classificador com os rótulos pré-classificados calculamos a taxa de acerto do classificador de cada indivíduo, e a taxa de acerto média entre os 3 classificadores será a taxa de acerto geral do classificador baseado em regras. A capacidade de identificação das tarefas mentais desse classificador está estritamente relacionada à capacidade medição do ERD/ERS durante a gravação de EEG. Portanto, a utilização do método de separação linear de fontes deve provocar um aumento na taxa de acerto desse classificador.

6.6 Classificação utilizando QDA

Para cada indivíduo as 2 primeiras sessões de EEG serão utilizadas para estimação dos parâmetros das classes e a última sessão será utilizada para testar o classificador. Como sabemos o rótulo da terceira sessão, podemos comparar o resultado obtido pelo classificador com o resultado pré-rotulado e assim calcular as taxas de acerto dos classificadores e as matrizes de confusão. A classificação, então, é realizada em janelas de 1 s de sinal, simulando um processo de classificação em tempo real. As épocas das duas primeiras sessões são concatenadas de forma que existem aproximadamente 8 épocas para cada classe de tarefa mental.

Conforme a notação dada na sessão 6.2, $\mathbf{x}_k(i, j, c)$ representará a amostra de EEG j da época i levando agora em consideração o canal c e a classe k , em que o índice i varia entre ($i = 1, 2, \dots, 8$), o índice j varia entre ($j = 1, 2, \dots, 10240$), o índice c varia entre ($c = 1, 2, \dots, 32$) e o índice k varia entre ($k = 1, 2, 3$) representando cada uma das 3 classes. Para o treinamento do classificador as épocas de mesma classe das sessões 1 e 2 são agrupadas em, $\mathbf{C}_1 = [\mathbf{x}_{c_1}(1, j, c), \mathbf{x}_{c_1}(2, j, c), \dots, \mathbf{x}_{c_1}(8, j, c)]$, $\mathbf{C}_2 = [\mathbf{x}_{c_2}(1, j, c), \mathbf{x}_{c_2}(2, j, c), \dots, \mathbf{x}_{c_2}(8, j, c)]$ e $\mathbf{C}_3 = [\mathbf{x}_{c_3}(1, j, c), \mathbf{x}_{c_3}(2, j, c), \dots, \mathbf{x}_{c_3}(8, j, c)]$.

As características dos conjuntos de cada classe são estimadas em janelas de 1 segundo. Cada conjunto, \mathbf{C}_k , possui 8 épocas de aproximadamente 20 segundos, portanto, cada conjunto possuirá aproximadamente 160 janelas. Como foi discutido na sessão 5.2.5 o sinal de EEG medido em janelas de 1 segundo pode ser considerado como um processo estocástico estacionário no sentido amplo. Dessa forma assumimos que as características obtidas nessas janelas são variáveis com média e variância constantes e distribuição estatística aproximadamente normal.

Da mesma forma o classificador baseado em regras, as características das classes do QDA são a energia média do sinal de EEG dos canais C3, C4 e F7 filtrados entre 8 e 12 Hz. Então, a energia e a energia média sinal de EEG filtrado na banda μ de cada conjunto ($\mathbf{C}_1(j', c), \mathbf{C}_2(j', c), \mathbf{C}_3(j', c)$, $j' = 1, 2, \dots, 8 \times 10240$) representando cada classe é calculada, em que se obtêm $\mathbf{e}_{c_k}(j', c)$ e $\bar{\mathbf{e}}_{c_k}(c)$. A energia e a energia média do canal C3 ($c = 8$) do conjunto \mathbf{C}_k são dadas por $\mathbf{C3}_{c_k}(j') = \mathbf{e}_{c_k}(j', 8)$ e $\bar{\mathbf{C3}}_{c_k} = \bar{\mathbf{e}}_{c_k}(8)$. De maneira semelhante, $\mathbf{C4}_{c_k}(j') = \mathbf{e}_{c_k}(j', 23)$, $\bar{\mathbf{C4}}_{c_k} = \bar{\mathbf{e}}_{c_k}(23)$, $\mathbf{F7}_{c_k}(j') = \mathbf{e}_{c_k}(j', 3)$ e $\bar{\mathbf{F7}}_{c_k} = \bar{\mathbf{e}}_{c_k}(3)$.

Dessa forma define-se o vetor média $\boldsymbol{\mu}_k = [\mathbf{C3}_{c_k}, \mathbf{C4}_{c_k}, \mathbf{F7}_{c_k}]$ utilizado para definir a função de probabilidade normal da classe k . E, a partir de $\mathbf{C3}_{c_k}(j')$, $\mathbf{C4}_{c_k}(j')$ e $\mathbf{F7}_{c_k}(j')$ pode-se calcular matriz de covariância da classe k , $\boldsymbol{\Sigma}_k$, através da equação (5.9),

$$\bar{\boldsymbol{\mu}}_k = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_{C3} \\ \bar{\mu}_{C4} \\ \bar{\mu}_{F7} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_k = \begin{bmatrix} \sigma_{C3}^2 & \rho_{C3,C4}\sigma_{C3}\sigma_{C4} & \rho_{C3,F7}\sigma_{C3}\sigma_{F7} \\ \rho_{C4,C3}\sigma_{C4}\sigma_{C3} & \sigma_{C4}^2 & \rho_{C4,F7}\sigma_{C4}\sigma_{F7} \\ \rho_{F7,C3}\sigma_{F7}\sigma_{C3} & \rho_{F7,C4}\sigma_{F7}\sigma_{C4} & \sigma_{F7}^2 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Então, para cada indivíduo são calculadas as funções discriminante quadrático de cada classe ($g_{C_1}(\mathbf{x})$, $g_{C_2}(\mathbf{x})$ e $g_{C_3}(\mathbf{x})$), pela equação (5.11).

No presente banco de dados, todas as classes possuem mesma frequência de ocorrência, dado que existem 8 épocas, com aproximadamente a mesma duração (20 janelas), para cada classe. Dessa forma, o cálculo da probabilidade a priori de cada classe, se torna,

$$N_1 = N_2 = N_3 = 160 \quad e \quad N = N_1 + N_2 + N_3 = 480$$

$$P(C_1) = \frac{N_1}{N} = P(C_2) = \frac{N_2}{N} = P(C_3) = \frac{N_3}{N} = \frac{160}{480} = \frac{1}{3} . \quad (6.10)$$

Portanto, todas as classes possuem mesma probabilidade a priori, $P(C_k)$, o que justifica a simplificação realizada na função discriminante da equação 5.11.

A terceira sessão de cada indivíduo é utilizada para testar o classificador quadrático. A classificação é realizada em janelas de 1 s de sinal, simulando um processo de classificação em tempo real. A energia média de cada janela de 1 s composta pelo sinal de EEG filtrado na banda μ é calculada de forma semelhante à apresentada nas equações (6.7) e (6.8) para o conjunto de validação, em que se obtêm $\bar{e}_g(\omega, c)$, composto pelas janelas da terceira sessão do indivíduo.

A figura 6.11 ilustra o processo para a extração de características em cada janela que será classificada. Na parte superior está mostrado o sinal de EEG do canal C3 do indivíduo 1 durante a sessão 1 e estão marcadas as divisões das épocas. A figura central mostra o mesmo sinal filtrado entre 8 e 12Hz e a figura inferior mostra a energia do sinal filtrado no intervalo de tempo de uma época. A época 1 é analisada em janelas de 1s, e a linha horizontal pontilhada representa a energia média da janela.

E também da mesma maneira mostrada anteriormente, a energia média de cada janela ω do canal C3 ($c = 8$) é dada por $\mathbf{C3}_g(\omega) = \bar{e}_g(\omega, 8)$. De maneira similar $\mathbf{C4}_g(\omega) = \bar{e}_g(\omega, 23)$ e $\mathbf{F7}_g(\omega) = \bar{e}_g(\omega, 3)$. A observação das características de cada dada janela da sessão de teste é armazenada na matriz $\mathbf{x} = [\mathbf{C3}_g(\omega), \mathbf{C4}_g(\omega), \mathbf{F7}_g(\omega)]$, que é aplicada nas funções discriminantes das classes. Cada função discriminante retorna um número que indica a probabilidade do vetor \mathbf{x} pertencer à classe e a regra da máxima semelhança diz que \mathbf{x} pertence à classe cuja função discriminante obteve maior valor.

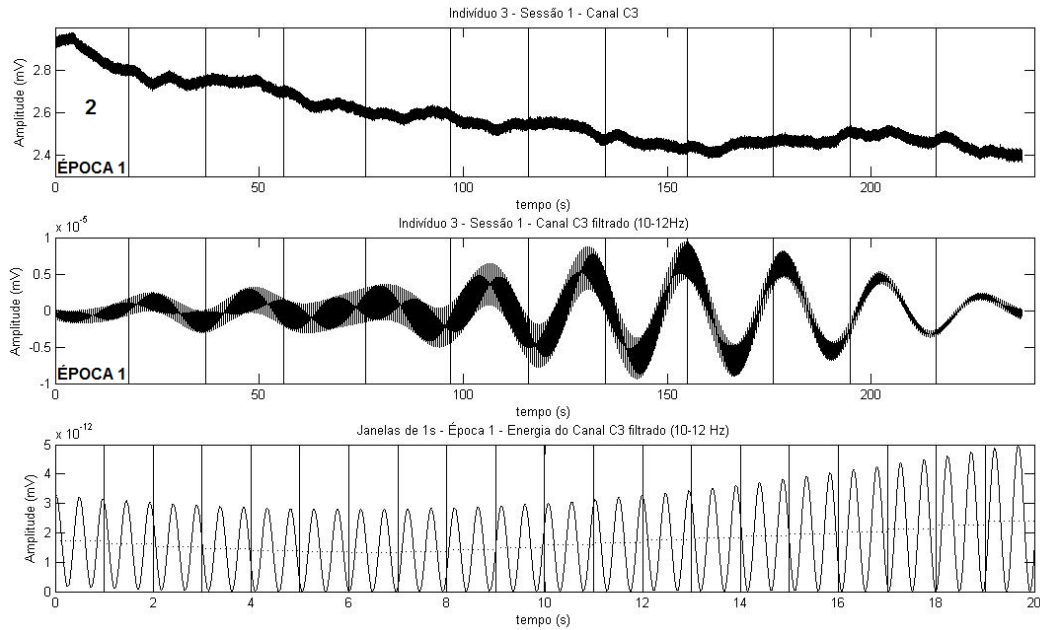


Figura 6.11 – Energia média das janelas da época 1, sinal de EEG do indivíduo 3, canal C3, sessão 1.

Como a 3ª sessão dos indivíduos possui em média 12 épocas de 20 s, existirão 240 janelas para classificação. Comparando os 240 resultados obtidos pelo classificador com os rótulos pré-classificados calculamos a taxa de acerto do classificador de cada indivíduo, e a taxa de acerto média entre os 3 classificadores será a taxa de acerto geral do classificador com discriminante quadrático.

6.7 Classificação utilizando LDA

Para o LDA, a classificação do banco de dados é realizada de forma análoga ao QDA, porém, como visto na sessão 5.2.3, o LDA assume que as matrizes de covariância das classes são iguais. No presente banco de dados, as matrizes de covariância estimadas Σ_1 , Σ_2 e Σ_3 são diferentes, portanto é necessário substituímos as matrizes de covariâncias individuais por uma única matriz que represente as 3 classes, $\hat{\Sigma}$.

Para esse fim será utilizado o primeiro método de regularização, proposto na sessão 5.2.4, em que as matrizes de covariância individuais são substituídas pela média ponderada. A matriz de covariâncias de cada classe é ponderada por sua probabilidade a priori, mas como foi visto na sessão 6.5, todas as classes desse banco de dados possuem a mesma probabilidade a priori e a equação (5.14) se resume a:

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma} &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^3 \Sigma_k \cdot N_k = P(C_1) \cdot \Sigma_1 + P(C_2) \cdot \Sigma_2 + P(C_3) \cdot \Sigma_3 \Leftrightarrow \\ \hat{\Sigma} &= \frac{1}{3} \cdot \Sigma_1 + \frac{1}{3} \cdot \Sigma_2 + \frac{1}{3} \cdot \Sigma_3 = \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3}{3} .\end{aligned}\quad (6.11)$$

Portanto $\hat{\Sigma}$ é a média das matrizes de covariância, Σ_1 , Σ_2 e Σ_3 . Dessa maneira, o classificador LDA é calculado em janelas, da mesma forma que o QDA, mas utiliza-se a matriz de covariância $\hat{\Sigma}$ na função discriminante da equação 5.13. Todas as classes possuem mesma probabilidade a priori, $P(C_k)$, o que justifica a simplificação realizada na função discriminante da equação 5.13.

6.8 Classificação utilizando RDA

Para o classificador RDA, a classificação do banco de dados é realizada de forma análoga ao QDA e o LDA, porém, depois de calculadas as matrizes de covariância das classes, Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 , e $\hat{\Sigma}$, calcula-se a matriz $\hat{\Sigma}_k(\lambda)$ em função do parâmetro de regularização λ , definido no segundo método de regularização através da equação 5.15. Essa equação é aplicada à função discriminante quadrático (equação 5.11), em que todas as classes possuem mesma probabilidade a priori e, portanto, o termo $\ln(P(C_k))$ pode ser desprezado, obtendo-se:

$$\begin{aligned}g_{C_k}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k)^T \cdot \hat{\Sigma}_k^{-1}(\lambda) \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k) - \frac{1}{2} \ln |\hat{\Sigma}_k(\lambda)| + \ln(P(C_k)) \Rightarrow \\ g_{C_k}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k)^T \cdot \hat{\Sigma}_k^{-1}(\lambda) \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k) - \frac{1}{2} \ln |\hat{\Sigma}_k(\lambda)| .\end{aligned}\quad (6.12)$$

O parâmetro de regularização λ assume valores entre $0 \leq \lambda \leq 1$ e foi discretizado em incrementos de 0,1 ($\lambda = [0, 0,1, 0,2 \dots 1,0]$), gerando 11 funções discriminantes para cada classe. Então, da mesma forma que é realizada a classificação para o QDA, as 2 primeiras sessões de cada indivíduo são divididas e organizadas em épocas para se estimar os parâmetros $\boldsymbol{\mu}_k$ e Σ_k , enquanto a terceira sessão é utilizada para se testar o classificador.

Todo o processo é realizado em janelas de 1 s. Existem 240 janelas para classificação, comparando os resultados obtidos pelos classificadores com os rótulos

pré-classificados calculamos a taxa de acerto dos classificadores de cada indivíduo, e a taxa de acerto média entre os 3 classificadores será a taxa de acerto geral do classificador com discriminante regularizado. O discriminante calculado por esse método será chamado RDA-1. Por fim, escolhe-se o RDA-1 cujo parâmetro, λ , proporcionou maior taxa de acerto.

O último classificador Bayesiano apresentado utiliza a função discriminante regularizada dada pelo terceiro método de regularização, através da equação 5.23. Como todas as classes possuem mesma probabilidade a priori, o termo $\ln(P(C_k))$ pode ser desprezado, obtendo-se:

$$g_{C_k}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k)^T \cdot \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_k^{-1}(\lambda, \gamma) \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k) - \frac{1}{2} \ln |\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_k(\lambda, \gamma)| + \ln(P(C_k)) \Rightarrow$$

$$g_{C_k}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k)^T \cdot \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_k^{-1}(\lambda, \gamma) \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k) - \frac{1}{2} \ln |\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_k(\lambda, \gamma)|. \quad (6.13)$$

Os parâmetros de regularização λ e γ assumem valores entre 0 e 1, e foram discretizados em incrementos de 0,1, ($\lambda = [0, 0,1, 0,2, \dots, 1,0]$ e $\gamma = [0, 0,1, 0,2, \dots, 1,0]$), gerando uma malha com 121 funções discriminantes. O discriminante calculado por esse método será chamado RDA-2. Então, escolhe-se o RDA-2 cujos parâmetros, λ e γ , proporcionaram maior taxa de acerto.

6.9 Classificação utilizando RNA

Os dados de treinamento da RNA são obtidos da mesma forma que foram obtidos para o classificador QDA, utilizando as 2 primeiras sessões de cada indivíduo como sessões de treinamento. Para o treinamento da RNA, tais sessões não precisam ser divididas em épocas, e também não precisam ser concatenadas e agrupadas.

As sessões são divididas em janelas de 1 s, em cada janela é extraída a característica de treinamento e rótulo da tarefa mental realizada na respectiva janela, formando uma matriz de características de treinamento e uma matriz alvo que contém os rótulos. Cada sessão tem duração aproximada de 4 minutos, portanto o conjunto de treinamento será formado por 480 janelas. Os vetores de características de cada janela contêm os valores de energia média da janela para os sinais dos eletrodos C3, C4 e F7, filtrados na banda μ , de maneira similar à calculada através das equações (6.7) e (6.8).

Os vetores de cada janela são concatenados formando a matriz de características das sessões, $\Psi_{\text{sessão1}}$ e $\Psi_{\text{sessão2}}$, e as matrizes de características das sessões são concatenadas em uma única matriz de características, Ψ , para treinamento da RNA.

Como foi mencionado na sessão 5.3, as RNAs utilizadas são perceptrons multicamadas com retro-propagação de erro, e utilizam o algoritmo de aprendizagem de regularização automática. Esse algoritmo apresenta melhor desempenho quando as entradas e saídas estão escaladas entre valores de -1 a 1. As redes possuem três camadas e a camada de saída possui dois neurônios gerando combinações binárias para representar às tarefas mentais, portanto as classes são rotuladas com a seguinte codificação binária,

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

A terceira sessão de cada indivíduo é utilizada para testar a RNA. A classificação, da mesma forma que a estimação de parâmetros, é realizada em janelas de 1 s de sinal, simulando um processo de classificação em tempo real. Como a 3ª sessão dos indivíduos possui em média 4 minutos, existirão 240 janelas para classificação. Comparando os 240 resultados obtidos pelo classificador com os rótulos pré-classificados é calculada a taxa de acerto do classificador para cada indivíduo, e a taxa de acerto média entre os 3 classificadores será a taxa de acerto geral da RNA. Na camada intermediária variou-se o número de neurônios de 1 a 20, para assim, escolher qual das 20 redes apresenta melhor desempenho.

6.10 Resultados

Para verificar a validade do modelo de fontes cerebrais e o método de separação linear de fontes (SLF), os resultados obtidos pelos classificadores utilizando o banco de dados original são comparados com os resultados dos classificadores utilizando o banco de dados processado pelo método SLF. Para facilitar a compreensão dessa sessão, os classificadores que utilizam o banco de dados original serão chamados de classificadores não processados (NP) e os classificadores que utilizam o banco de dados processados pelo método SLF-1 e SLF-2 serão chamados de classificadores (SLF-1) e (SLF-2), respectivamente.

O classificador baseado em regras (NP) obteve taxa de acerto de $34,80 \pm 2,02\%$, o que é um resultado muito próximo de um classificador aleatório, pois em 3 classes o classificador aleatório obteria $33,3\%$ de acerto. Após a aplicação do método (SLF-1), o classificador baseado em regras obteve taxa de acerto anterior de $38,91 \pm 2,07\%$ e após a aplicação do método (SLF-2), o classificador baseado em regras obteve taxa de acerto de $44,33 \pm 2,10\%$.

O classificador QDA(NP), visto como um caso particular do RDA, obteve taxa de acerto de $34,31 \pm 3,48\%$, o QDA(SLF-1) obteve taxa de acerto de $38,38 \pm 3,57\%$ e o QDA(SLF-2) obteve taxa de acerto de $32,07 \pm 3,42\%$. O classificador LDA(NP), visto como um caso particular do RDA, obteve taxa de acerto de $28,29 \pm 3,30\%$, o LDA (SLF-1) obteve taxa de acerto de $35,85 \pm 3,52\%$ e o LDA(SLF-2) obteve taxa de acerto de $28,29 \pm 3,30\%$.

A figura 6.12 mostra os resultados obtidos com o classificador RDA-1 em função do parâmetro de regularização, λ . O classificador RDA-1(NP) obteve a melhor taxa de acerto, $34,31 \pm 3,48\%$, para $\lambda=0$, e o RDA-1(SLF-1) obteve a melhor taxa de acerto, $38,38 \pm 3,57\%$, para $\lambda=0$, que são os mesmos resultados obtidos com QDA. Esse fato não é coincidência visto que, como mencionado na sessão 6.2.3, o valor $\lambda=0$ representa à Análise por Discriminante Quadrático (QDA), enquanto $\lambda=1$ representa à Análise por Discriminante Linear (LDA). O RDA-1(SLF-2) obteve a melhor taxa de acerto, $32,49 \pm 3,44\%$, para $\lambda=0,5$.

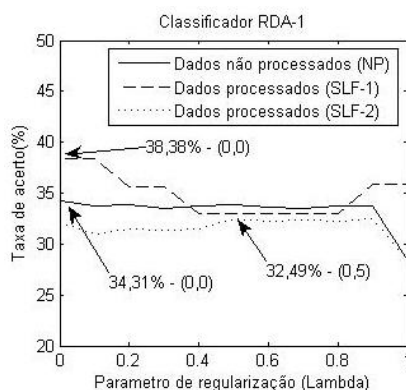


Figura 6.12 – Taxas de acerto do classificador RDA-1 em função do parâmetro de regularização, λ .

A figura 6.13 mostra os resultados obtidos com o classificador RDA-2 em função dos parâmetros de regularização, λ e γ . O classificador RDA-2(NP) obteve a melhor taxa de acerto, $32,29 \pm 3,51\%$, para $\lambda=1$ e $\gamma=0,7$. O RDA-2(SLF-1) obteve a

melhor taxa de acerto, $38,38 \pm 3,57\%$, para $\lambda=1$ e $\gamma=0$, e o RDA-2(SLF-2) obteve a melhor taxa de acerto, $34,45 \pm 3,49\%$, para $\lambda=0$ e $\gamma=0,2$.

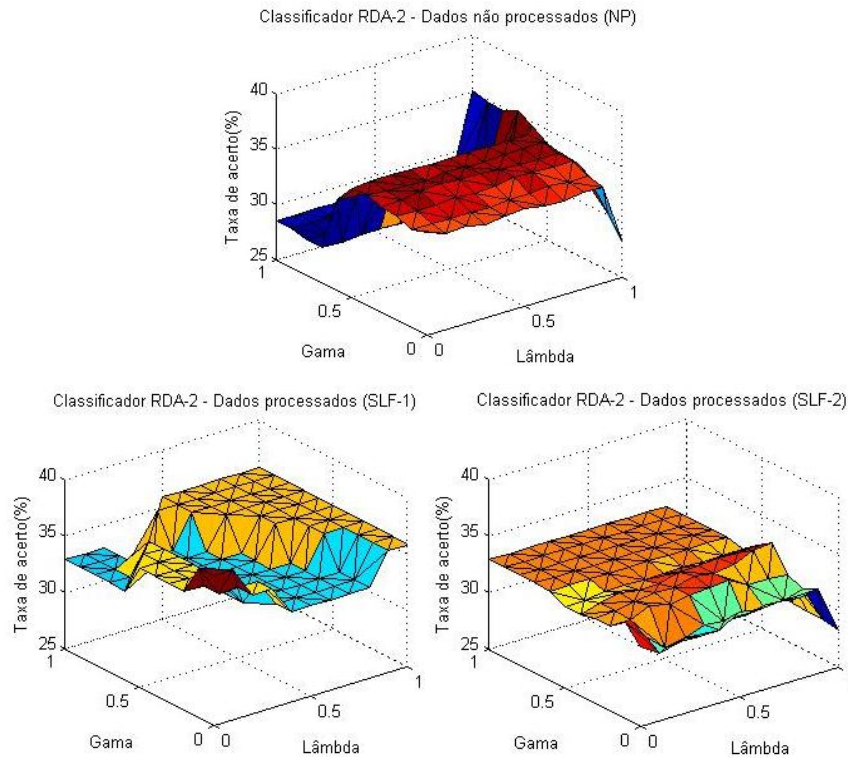


Figura 6.13 – Taxas de acerto do classificador RDA-2 em função dos parâmetros de regularização, λ e γ .

A figura 6.14 mostra os resultados obtidos com as RNAs em função do número de neurônios da camada intermediária. A maior taxa de acerto das RNAs(NP) foi de $36,41 \pm 3,53\%$, para a rede com 13 neurônios na camada intermediária, $r = 13$. A maior taxa de acerto das RNAs(SLF-1) foi de $39,50 \pm 3,59\%$, $r = 10$, e a maior taxa de acerto das RNAs(SLF-2) foi de $41,42 \pm 3,61\%$, $r = 10$.

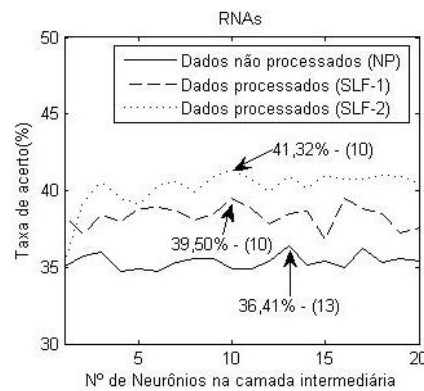


Figura 6.14 – Taxas de acerto das RNAs em função do número de neurônios da camada intermediária.

6.11 Análise dos resultados

A figura 6.15 mostra os resultados obtidos pelos melhores classificadores de cada tipo dentro de um intervalo de confiança de 95%. A escolha entre os métodos de separação de fontes SLF-1 e SLF-2 é ambígua, pois para os classificadores Bayesianos (QDA, LDA, RDA-1 e RDA-2) o método SLF-1 provocou um aumento da taxa de acerto, enquanto para o classificador baseado em regras e RNAs, foi o método SLF-2 que provocou um aumento da taxa de acerto.

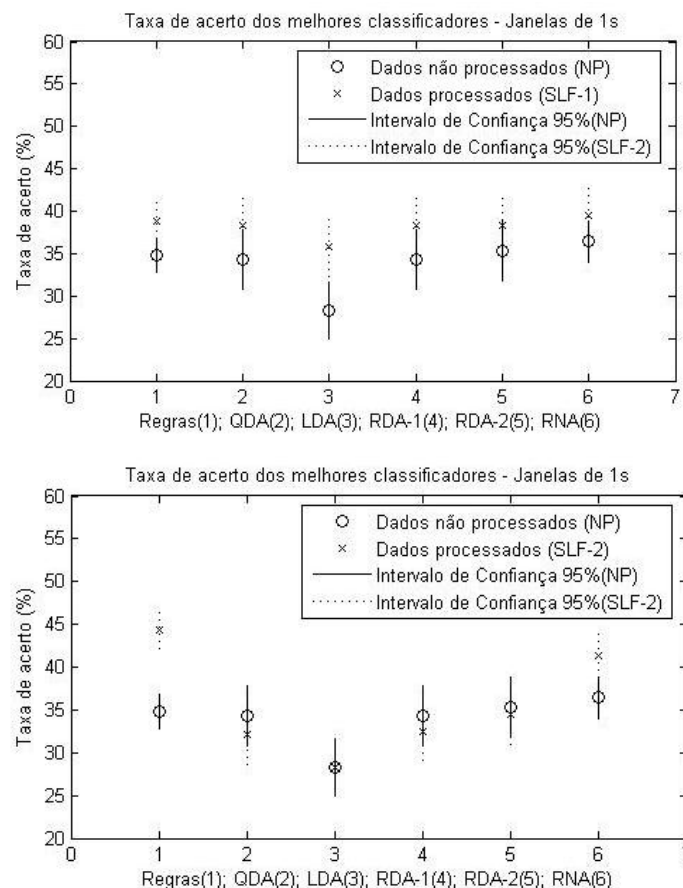


Figura 6.15 – Taxas de acerto dos classificadores; Superior: SLF-1; Inferior: SLF-2

Avaliaremos, agora, até que ponto se pode afirmar que um método em particular (SLF-1 ou SLF-2) foi útil para o classificador. Para isso analisaremos os intervalos de confiança dos melhores resultados de cada classificador. Para o classificador baseado em regras o método (SLF-2) realmente foi útil, pois o resultado do classificador (SLF-2) está fora do intervalo de confiança do classificador (NP). Para o classificador QDA, os intervalos de confiança dos classificadores se cruzam. Isso indica que existe 95% de chance do QDA(NP) alcançar seu melhor resultado $34,31 \pm 3,48\% = 37,79\%$, o que

ainda é inferior à 38,38%, mas também existe 95% de chance do QDA(SLF-1) obter o pior resultado $(38,38 - 3,57)\% = 34,81\%$. Portanto o método SLF não foi útil para melhorar a taxa de acerto desse classificador.

Para o classificador LDA, apesar da figura 6.15 não mostrar com precisão, os intervalos de confiança dos classificadores não se cruzam, pois o melhor resultado do classificador LDA(NP) é $(28,29 + 3,30)\% = 31,59\%$ e o pior resultado do LDA(SLF-1) é $(35,85 - 3,52)\% = 32,33\%$. Dessa forma, assumindo o critério do intervalo de confiança de 95% para julgar a utilidade dos métodos de separação de fontes (SLF-1 e SLF-2) nos classificadores, podemos afirmar que o método SLF-1 foi útil para melhorar a taxa de acerto desse classificador.

Os classificadores RDA-1 e RDA-2 estão no mesmo caso analisado para o classificador QDA, pois os intervalos de confiança se cruzam e, portanto, o método SLF não foi útil para melhorar a taxa de acerto desses classificadores. O intervalo de confiança das RNAs se cruzam, portanto, pelo critério adotado, o método SLF não foi útil para melhorar a taxa de acerto desse classificador.

O classificador que obteve melhor resultado utilizando janelas de 1s foi o classificador baseado em regras (SLF-2), que obteve taxa de acerto de $44,33 \pm 2,10\%$ e a RNA com, $r = 10$, que obteve taxa de acerto de $41,42 \pm 3,61\%$. Utilizamos a matriz de confusão para verificar se o classificador tende a errar mais para alguma das opções. As matrizes de confusão dos respectivos classificadores estão mostradas nas tabelas 6.1 e 6.2. As linhas representam os resultados obtidos pelos classificadores e as colunas representam os rótulos previamente conhecidos.

Tabela 6.1 – Matriz de confusão do classificador baseado em regras (SLF-2).

Regras(SLF-2)	Mão Esquerda	Mão Direita	Palavras
Mão Esquerda	272	155	141
Mão Direita	223	414	390
Palavras	141	142	263

A matriz de confusão da tabela 6.1 mostra que o classificador baseado em regras é capaz de classificar todas as classes. O número de acertos para mão esquerda é 1,2 vezes maior que a confusão com a mão direita e 1,9 vezes maior que a confusão com a geração de palavras. O número de acertos para mão direita é 2,7 vezes maior que a confusão com a mão esquerda e 2,9 vezes maior que a confusão com a geração de

palavras. O número de acertos para geração de palavras é 1,9 vezes maior que a confusão com a mão esquerda e 1,5 vezes menor que a confusão com a mão direita, o que mostra que o classificador possui tendência em confundir a geração de palavras com a mão direita. A matriz de confusão também mostra que a suposição feita na sessão 6.5 sobre a sincronização dos circuitos tálamo-corticais da área de broca é razoável, pois permitiu a identificação da tarefa mental de geração de palavras, apesar de ocorrer maior confusão durante a identificação dessa classe.

Tabela 6.2 – Matriz de confusão da melhor RNA (SLF-2).

RNA(SLF-2)	Mão Esquerda	Mão Direita	Palavras
Mão Esquerda	89	71	64
Mão Direita	30	28	32
Palavras	95	127	178

A matriz de confusão da tabela 6.2 mostra que a RNA se especializou no reconhecimento da tarefa mental de geração de palavras. O número de acertos para mão esquerda é 3 vezes maior que a confusão com a mão direita e 1,1 vezes menor que a confusão com a geração de palavras, o que mostra que o classificador possui tendência em confundir a mão direita com a geração de palavras. O número de acertos para mão direita é 2,5 vezes menor que a confusão com a mão esquerda e 4,5 vezes menor que a confusão com a geração de palavras, o que mostra que o classificador possui tendência em confundir a mão direita com as outras duas classes. O número de acertos para geração de palavras é 5,6 vezes maior que a confusão com a mão direita e 2,8 vezes maior que a confusão com a mão esquerda.

Observa-se que o número de ocorrências de classificações da matriz de confusão da tabela 1 é maior que o número de ocorrências da matriz de confusão da tabela 6.2. Isso ocorre porque o classificador baseado em regras não necessita de dados de treinamento e, portanto, foi testado com todas as sessões de todos os indivíduos. Enquanto as RNAs foram testadas somente com a terceira sessão de cada indivíduo, resultando em um número muito menor de classificações.

6.12 Resultados utilizando janelas de 10 s

As tarefas mentais são realizadas por aproximadamente 20s, portanto sabemos que durante várias janelas de 1s, o classificador deverá apresentar a mesma classe. Para aumentar a confiança dos classificadores, a classificação realizada em janelas de 1s é armazenada em um vetor com tamanho variável, e a classe predominante no vetor será atribuída ao classificador. O tamanho do vetor é variado entre 1 a 20 janelas de 1s, e foi escolhido o vetor com no máximo 10 janelas que proporcionou maior taxa de acerto. Esse sistema simula uma classificação em tempo real com correção de erros, de forma que o classificador já treinado realiza as classificações em janelas de 1s de sinal de EEG e o sistema armazena as classificações num vetor. O vetor tem no máximo 10 janelas, então, o sistema realizaria a classificação em um tempo máximo de 10s.

As taxas de acerto dos classificadores baseados em regras, em função do número de janelas estão mostradas na figura 6.16. O classificador(NP) com melhor resultado obteve $35,51 \pm 2,03\%$ de acerto para janelas de 2s. O classificador(SLF-1) com melhor resultado obteve $39,41 \pm 2,07\%$ de acerto para janelas de 3s. O classificador(SLF-2) com melhor resultado obteve $52,74 \pm 2,11\%$ de acerto para janelas de 9s.

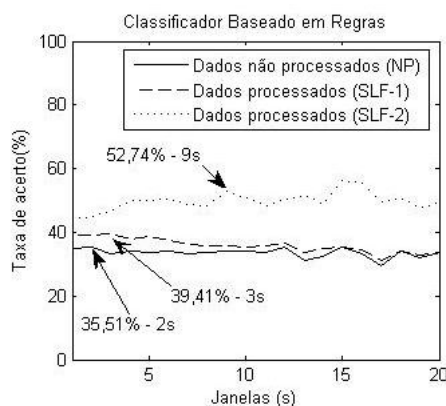


Figura 6.16 – Taxas de acerto dos melhores classificadores baseados em regras em função do número de janelas.

A figura 6.17 mostra os resultados obtidos com o classificador QDA e LDA em função do número de janelas. O classificador QDA(NP) obteve a melhor taxa de acerto, $49,37 \pm 3,67\%$, para janelas de 9 s, o QDA(SLF-1) obteve a melhor taxa de acerto, $53,52 \pm 3,66\%$, para janelas de 10 s e o QDA(SLF-2) obteve a melhor taxa de acerto, $43,66 \pm 3,64\%$, para janelas de 10 s. O classificador LDA(NP) obteve a melhor taxa de acerto, $43,82 \pm 3,64\%$, para janelas de 4 s, o LDA(SLF-1) obteve a melhor taxa de acerto,

$36,69 \pm 3,54\%$, para janelas de 1 s e o LDA(SLF-2) obteve a melhor taxa de acerto, $46,64 \pm 3,66\%$, para janelas de 4 s (Figura 6.18).

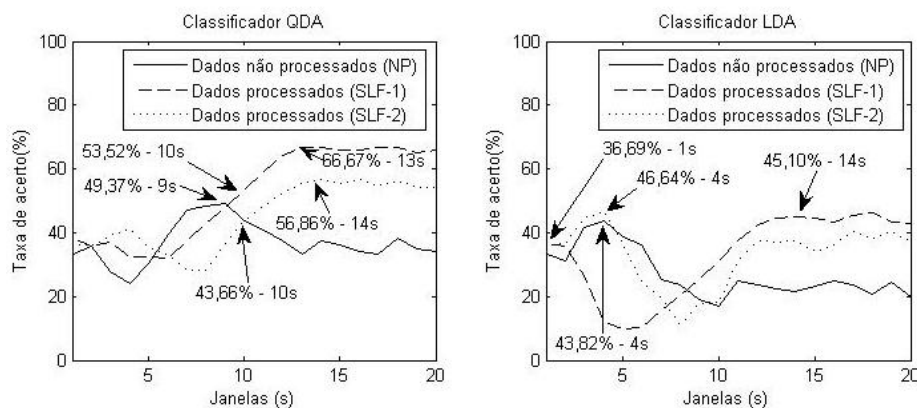


Figura 6.17 – Taxas de acerto dos melhores classificadores QDA (esquerda) e LDA (direita) em função do número de janelas (as setas indicam os melhores resultados para janelas de até 10s e para janelas de até 15s).

A figura 6.18 mostra os resultados obtidos com o classificador RDA-1 em função do número de janelas. O classificador RDA-1(NP) obteve a melhor taxa de acerto, $49,37 \pm 3,67\%$, para $\lambda=0$ e janelas de 9 s, e o RDA-1(SLF-1) obteve a melhor taxa de acerto, $53,52 \pm 3,66\%$, para $\lambda=0$ e janelas de 10 s, que são os mesmos resultados obtidos com QDA. Esse fato não é coincidência visto que, foi dito na sessão 6.2.3 que o valor $\lambda=0$ representa à Análise por Discriminante Quadrático (QDA), enquanto $\lambda=1$ representa à Análise por Discriminante Linear (LDA). O RDA-1(SLF-2) obteve a melhor taxa de acerto, $46,63 \pm 3,66\%$, para $\lambda=1$ e janelas de 4 s.

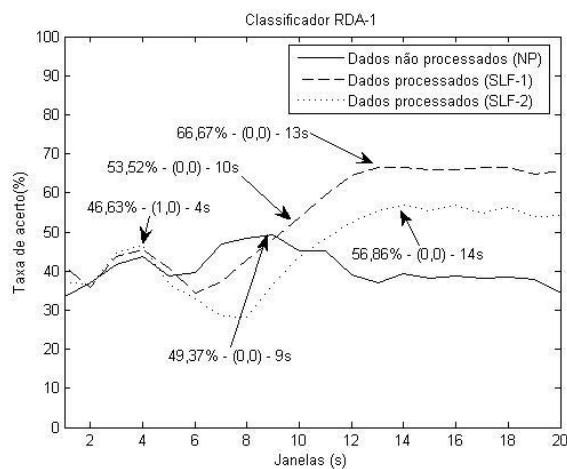


Figura 6.18 – Taxas de acerto dos melhores classificadores RDA-1 em função do número de janelas (as setas indicam os melhores resultados para janelas de até 10s e para janelas de até 15s).

A figura 6.19 mostra os resultados obtidos com o classificador RDA-2 em função do número de janelas. O classificador RDA-2(NP), obteve a melhor taxa de acerto, $51,69 \pm 3,67\%$, para $\lambda=0$, $\gamma=0,6$ e janelas de 8 s. O RDA-2(SLF-1) obteve a melhor taxa de acerto, $53,52 \pm 3,66\%$, para $\lambda=0$, $\gamma=0,6$ e janelas de 10 s, e o RDA-2(SLF-2) obteve a melhor taxa de acerto, $52,81 \pm 3,66\%$, para $\lambda=0$, $\gamma=0,6$ e janelas de 4 s.

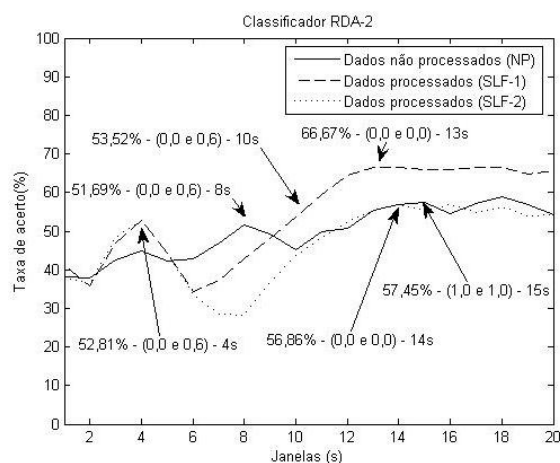


Figura 6.19 – Taxas de acerto dos melhores classificadores RDA-2 em função do número de janelas (as setas indicam os melhores resultados para janelas de até 10s e para janelas de até 15s).

A figura 6.20 mostra os resultados obtidos com a RNA em função do número de janelas. A maior taxa de acerto das RNAs(NP) foi de $40,51 \pm 3,60\%$, para a rede com 18 neurônios na camada intermediária, $r = 18$ e janelas de 9 s. A maior taxa de acerto das RNAs(SLF-1) foi de $43,04 \pm 3,63\%$, $r = 4$ e janelas de 9 s, e a maior taxa de acerto das RNAs(SLF-2) foi de $47,19 \pm 3,66\%$, $r = 12$ e janelas de 8 s.

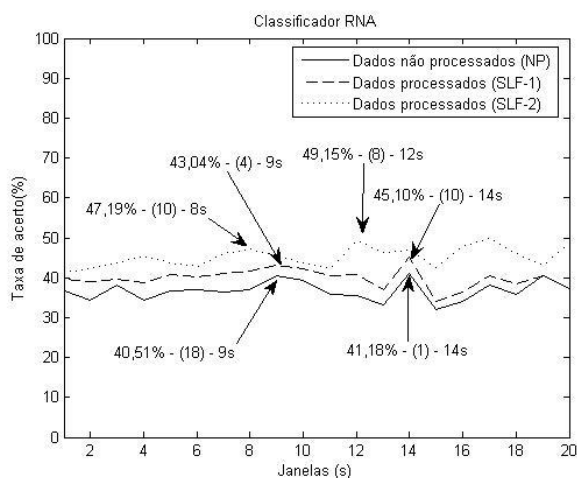


Figura 6.20 – Taxas de acerto das melhores RNAs em função do número de janelas (as setas indicam os melhores resultados para janelas de até 10s e para janelas de até 15s).

6.13 Análise dos resultados utilizando janelas de 10 s

A figura 6.21 mostra o resultado obtido pelos melhores classificadores de cada tipo dentro de um intervalo de confiança de 95%. Novamente, a escolha entre os métodos de separação de fontes SLF-1 e SLF-2 é ambígua, pois para a maioria dos classificadores Bayesianos (QDA, RDA-1 e RDA-2) o método SLF-1 provocou um aumento da taxa de acerto, enquanto para o classificador baseado em regras, o LDA e as RNAs, foi o método SLF-2 que provocou um aumento da taxa de acerto.

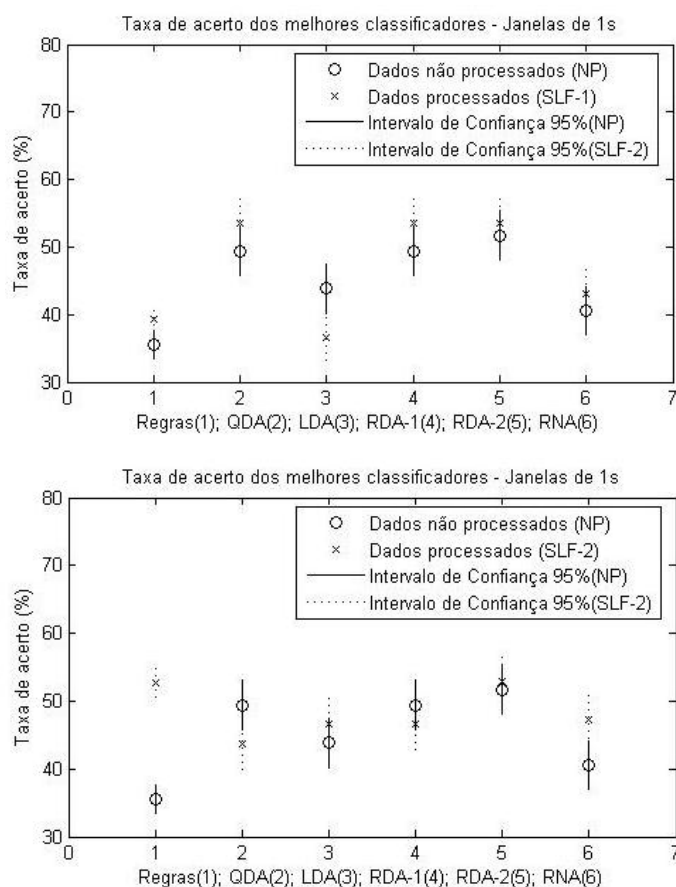


Figura 6.21 – Taxas de acerto dos classificadores; Parte de cima: SLF-1; Parte de baixo: SLF-2

Avaliaremos, agora, até que ponto se pode afirmar que um método em particular (SLF-1 ou SLF-2) foi útil para o classificador. Para isso analisaremos os intervalos de confiança dos melhores resultados de cada classificador.

Para o classificador baseado em regras o método (SLF-2) realmente foi útil, pois o resultado do classificador (SLF-2) está fora do intervalo de confiança do classificador (NP). Os classificadores QDA(SLF-1), RDA-1(SLF-1) e RNA(SLF-2) estão no mesmo

caso analisado para o classificador QDA (sessão 6.11), pois os intervalos de confiança se cruzam e, portanto, o método SLF não foi útil para melhorar a taxa de acerto desses classificadores. Os resultados dos classificadores LDA(SLF-2) e RDA-2(SLF-1) estão dentro do intervalo de confiança da classificação sem a utilização do método (NP), portanto, o método SLF não foi útil para melhorar a taxa de acerto desses classificadores.

Mesmo para os classificadores em que concluímos que a aplicação do método SLF não foi eficiente, podemos observar nas figuras 6.18, 6.19 e 6.20, que para um número de janelas superior a 10 s, a aplicação do método obteve resultados sempre maiores que os resultados dos classificadores(NP). Na figura 6.22, podemos observar que a aplicação de ambos os métodos, SLF-1 e SLF-2, obtiveram resultados superiores na maior parte dos casos.

Os classificadores que obtiveram os melhores resultados utilizando janelas de até 10 s foram o classificador baseado em regras (SLF-2), que obteve taxa de acerto de $52,74 \pm 2,11\%$, os classificadores QDA(SLF-1) e RDA-1(SLF-1) e RDA-2(SLF-1), que são idênticos e obtiveram taxas de acerto de $53,52 \pm 3,66\%$, e a RNA(SLF-2) que obteve taxa de acerto de $47,19 \pm 3,66\%$. As matrizes de confusão dos classificadores estão mostradas nas tabelas 6.3 a 6.5.

Tabela 6.3 – Matriz de confusão do melhor classificador baseado em regras (SLF-2).

Regras(SLF-2)	Mão Esquerda	Mão Direita	Palavras
Mão Esquerda	37	11	18
Mão Direita	20	62	45
Palavras	11	7	26

Tabela 6.4 – Matriz de confusão dos classificadores QDA/RDA-1/RDA-2(SLF-1).

QDA/RDA-1/RDA-2(SLF-1)	Mão Esquerda	Mão Direita	Palavras
Mão Esquerda	0	0	0
Mão Direita	0	0	0
Palavras	7	26	38

Tabela 6.5 – Matriz de confusão da melhor RNA(SLF-2).

RNA(SLF-2)	Mão Esquerda	Mão Direita	Palavras
Mão Esquerda	13	12	6
Mão Direita	2	2	1
Palavras	12	15	26

A matriz de confusão da tabela 6.3 mostra que o classificador baseado em regras é capaz de classificar todas as classes. O número de acertos para mão esquerda é 1,9 vezes maior que a confusão com a mão direita e 3,4 vezes maior que a confusão com a geração de palavras. O número de acertos para mão direita é 5,6 vezes maior que a confusão com a mão esquerda e 8,86 vezes maior que a confusão com a geração de palavras. O número de acertos para geração de palavras é 1,4 vezes maior que a confusão com a mão direita e 1,73 vezes menor que a confusão com a mão direita, o que mostra que o classificador possui tendência em confundir a geração de palavras com a mão direita.

As matrizes de confusão da tabela 6.4 mostra que os classificadores QDA(SLF-1), RDA-1(SLF-1) e RDA-2(SLF-1) não foram capazes de distinguir as 3 classes, atribuindo a tarefa mental de geração de palavras para todas as classes.

A matriz de confusão da tabela 6.5 mostra que a RNA foi capaz de classificar todas as classes, mas se especializou no reconhecimento da tarefa mental de geração de palavras. O número de acertos para mão esquerda é 6,5 vezes maior que a confusão com a mão direita e 1,1 vezes maior que a confusão com a geração de palavras. O número de acertos para mão direita é 6 vezes menor que a confusão com a mão esquerda e 7,5 vezes menor que a confusão com a geração de palavras, o que mostra que o classificador possui tendência em confundir a mão direita com as outras duas classes. O número de acertos para geração de palavras é 26 vezes maior que a confusão com a mão direita e 4,3 vezes maior que a confusão com a mão esquerda.

Em virtude do grande número de confusão durante a identificação da tarefa mental de imaginação de movimento da mão esquerda ocorrido na RNA, o classificador baseado em regras (SLF-2) com janelas de 9 s é a melhor opção dentre os classificadores analisados até o momento e seria escolhido para o controle da ICC, e apresenta a vantagem de não utilizar dados para treinamento. Em uma ICC programada por esse modelo de classificador, o usuário não necessitaria de efetuar gravações de EEG para treinamento, tornando a manipulação da interface imediata e genérica.

Capítulo 7 : Conclusão

Como foi dito na introdução dessa dissertação, o objetivo dessa pesquisa de mestrado foi propor um modelo para a interação das fontes cerebrais que associado a um classificador, pode ser capaz de identificar diferentes tarefas mentais, e portanto, ser aplicado a uma interface cérebro computador. No âmbito dessa proposta, concluímos que esses objetivos foram alcançados.

No capítulo 4 foi apresentado um modelo para interação de fontes cerebrais capaz de desmisturar os sinais elétricos corticais linearmente misturados no encéfalo. No capítulo 6 esse método foi testado em um banco de dados e foi mostrada sua eficiência em aumentar a taxa de acerto do classificador baseado em regras.

Outra suposição, analisada no decorrer da dissertação, e confirmada no capítulo anterior, foi à maior dificuldade de classificação da tarefa mental de imaginação de movimento da mão esquerda. No capítulo 3 foi abordado o fato da lateralização do hemisfério esquerdo durante intenções de movimento motoras (MRP). Então, devido à lateralização do hemisfério esquerdo e a contralateralidade dos movimentos motores, o ERD é observado mais facilmente durante intenção de movimento da mão direita.

Supomos que esses eventos prejudicariam o desempenho dos classificadores baseados nas características de ERD/ERS, como o classificador baseado em regras, e esse fato foi comprovado no capítulo 6. Para corrigir a confusão durante a classificação da tarefa mental da mão direita foram testados outros métodos como a utilização de várias janelas para efetuar a classificação. Porém, entre todos os classificadores analisados, o único capaz de classificar todas as classes e amenizar o problema de confusão durante a classificação da tarefa mental da mão direita foi o classificador baseado em regras, ironicamente o mais simples. Portanto, o objetivo de propor um modelo consistente para as fontes cerebrais foi alcançado e também o objetivo de escolher um classificador para a ICC.

7.1 Trabalhos futuros

Para a continuação desse trabalho propomos um estudo mais aprofundado para o modelo das fontes cerebrais. As simplificações decorrentes da suposição que as fontes cerebrais estão no mesmo plano dos eletrodos acarretam perda de precisão no processo

de separação linear de fontes. Portanto, espera-se melhorar o modelo, calculando as distâncias entre as fontes e eletrodos de forma mais realista.

Na sessão 3.5 foi abordado brevemente à condutividade dos tecidos cerebrais (Trindade, 2005) e na sessão 4.3.1 foi abordada a variação de condutividade e espessura do crânio (Tang et al., 2008). Em prosseguimento a esse estudo poderia se calcular a separação de fontes corticais utilizando o modelo realista proposto em 4.3.1. Nesse modelo as interações entre os campos elétricos dos dipolos são calculadas para um sistema de esferas ou elipses concêntricas. Cada qual representando uma das camadas de revestimento cerebral: as meninges dura-máter, aracnóide e pia-máter, o crânio e o escalpo (Cuffin, 1995). A casca esférica que representa o crânio seria subdivida em diferentes regiões com permissividades relativas ao tipo de estrutura óssea que apresenta (osso padrão de três camadas, osso de quase três camadas, osso compacto, osso quase compacto, sutura craniana denteada e sutura craniana escamosa). Por fim, a orientação dos dipolos poderia ser variada, de forma a considerar que estão posicionados perpendicularmente à superfície rugosa do córtex. Então, esse novo cálculo apresentaria uma estimativa muito mais realista da atenuação sofrida pelo campo elétrico do sinal cortical e permitiria uma forma mais precisa para desmisturar os sinais corticais medidos no escalpo.

A classificação da tarefa mental de movimento dos pés também é de profundo interesse. Visto que a área cortical relacionada ao movimento dos pés está localizada no giro pré-central, mas no interior da fissura sagital (Figura 2.11), dificilmente se poderia classificar a lateralidade do movimento dos pés, ou seja, distinguir o padrão de intenção de movimento do pé direito do padrão de intenção de movimento do pé esquerdo. Isso ocorre porque o ERD de ambas tarefas mentais seria gerado em uma área muito próxima no interior da fissura sagital para os dois hemisférios cerebrais e seria detectado por um único eletrodo central, o canal Cz. Mas, a tarefa mental de imaginação de movimento de ambos os pés simultaneamente pode ser combinada com a tarefa mental de imaginação de movimento das mãos, cuja lateralidade pode ser identificada, e a tarefa mental de geração de palavras, aumentando o número de sinais de comando disponíveis para o controle de uma ICC ou um sistema robótico.

A figura 7.1 mostra o padrão ERD observado durante a imaginação de movimento das mãos e pés. Pode-se que o ERD gerado durante a imaginação de movimento das mãos tem grande lateralidade e pode ser reconhecida nos eletrodos C3 e

C4, enquanto o ERD gerado durante a imaginação de movimento dos pés é gerado na área central do córtex motor, sendo captado no eletrodo Cz.

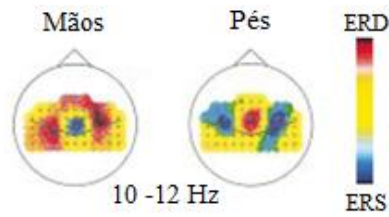


Figura 7.1 – ERD observado durante a imaginação de movimento das mãos e pés (adaptado de (Pfurtscheller & Lopes da Silva, 1999)).

A última sugestão é a implementação do classificador SVM (do inglês, *Support Vector Machine*) ao conjunto de classificadores abordados nessa pesquisa, para se obter num maior grupo de possibilidades, o melhor classificador associado ao método SLF.

Referências

- Anderson, C. W; Knight, J. N; Kirby, J. M e Hundley, D. G (2007). "Classification of time-embedded EEG using short-time principal component analysis", em: Dornhege, G; Millán, J; Hinterberger, T; McFarland, D. J. e Müller, K. R. (Ed.), *Toward Brain-Computer Interfacing*, Cambridge: The MIT Press, 261-278.
- Araújo, D. B; Carneiro A. A. O. e Baffa, O (2004). "Localizando a atividade cerebral via magnetoencefalografia". *Ciência e Cultura*, 56(1): 38-40.
- Azevedo, A. P (2005). Estudo do Sinal Eléctroencefalográfico (EEG) Aplicado a Interfaces Cérebro Computador com uma Abordagem de Reconhecimento de Padrões. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo.
- Balestro, R. Sistema Nervoso Central. Disponível em: <<http://www.soscorpo.com.br/anatomia/s-ner03.htm>>. Acesso em: 14 de janeiro de 2009.
- Bear, M. F; Connors, B. W. e Paradiso, M. A (2008). Neurociências: Desvendando o Sistema Nervoso. Terceira edição. Editora Artmed® S. A., São Paulo, Brasil.
- Beisteiner, R; Höllinger, P; Lindinger, G; Lang, W. e Berthoz, A (1995). "Mental Representations of Movements. Brain Potentials Associated with Imagination of Hand Movements", *Elsevier, Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, 96: 183-193.
- Benevides, A. B., Bastos Filho, T. F. e Sarcinelli Filho, M (2008). "Mental Task Recognition Based on EEG for Commanding a Robotic Wheelchair". *Proceedings of the 3rd Applied Robotics and Collaborative Systems Engineering (Robocontrol 08)*, 8.
- Blanco, S; Garcia, H; Quian, R. Q; Romanelli, L. e Rosso, O. A (1995). "Stationarity of the EEG Series", *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, 395-399.
- Brodman, K (2006). Brodman's Localization in the Cerebral Cortex. Terceira edição. Springer Science Business Media, Inc.
- Carvalho, R. M (2003). Princípios de Comunicações. Terceira edição.
- Cavalieri, D. C; Brandão, A. S; Ferreira, A; Benevides, A. B; Bastos, T. F e Sarcinelli, M (2007). "Redes Neurais Artificiais Aplicadas na Detecção de Piscadas de Olhos", *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 6.
- Cheeín, F. A. A (2005). Diseño de una Interfase Cerebro-computadora para la Navegación de Robots Móviles. Dissertação de Mestrado, Universidad Nacional de San Juan, Argentina.
- Cuffin, B. N (1995). "A Method for Localizing EEG Sources in Realistic Head Models", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 42(1):68-71.

- Delamonica, E. A (1984). Electroencefalografia. Editorial El Ateneo. Buenos Aires.
- Duda, R. O; Hart, P. E e Stork, D. G (2000). Pattern Classification, 2nd ed. United States: John Wiley & Sons Inc.
- Estébanez, J. M (2003). EEG-Based Analysis for the Design of Adaptive Brain Interfaces. Tese de Doutorado, Centre de Recerca en Enginyeria Biomèdica, Espanha.
- Friedman, J. H (1989). “Regularized discriminant analysis”. *Journal of the American Statistical Association*, 84(405): 165–175.
- Fukunaga, K (1990). Statistical Pattern Recognition. Segunda edição. Academic Press, San Diego, California, USA.
- Garcia, A. L (1994). Probability and Random Process for Electrical Engineering. Addison-Wesley Publishing Coompany. Segunda edição.
- Geisinger, D (2005). “Electrodos Implantables En El Cerebro en Aplicaciones de Prótesis Neuralis”. *Artigo vinculado ao XIV Seminário de Engenharia Biomédica, Universidad de La República Oriental Del Uruguay*.
- Graimann, B, Huggins, J. E., Levine, S. P. e Pfurtscheller, G (2002). “Visualization of Significant ERD/ERS Patterns in Multichannel EEG and ECoG data”. *Clinical Neurophysiology*, 113: 43-47.
- Grosse, P (2004). Diagnostic and experimental applications of cortico-muscular and intermuscular frequency analysis. Tese para Especialização em Neurologia, Clínica de Neurologia, Universidade de Medicina Charité, Campus Virchow-Klinikum, Berlim.
- Guyton, A. C. e Hall, J. E (2006). Textbook of Medical Physiology. 11ª Edição. Editora Elsevier Saunders, Philadelphia, Pennsylvania, USA.
- Hayt, W. H. Jr e Buck, J. A (2001). Eletromagnetismo. Sexta edição. Editora LTC, Rio de Janeiro.
- HowStuffWorks. Tipos de Neurônios básicos. Disponível em: <<http://hsw.uol.com.br/cerebro2.htm>>. Acesso em: 14 de janeiro de 2009.
- Kalcher, J e Pfurtscheller, G (1995). “Discrimination between phase-locked and non-phase-locked event-related EEG activity”. *Clinical Neurophysiology*, 94: 381-384.
- Lopes, C. D (2005). Análise de Sinais de EEG Utilizando a Transformada Wavelet Discreta e as Redes Neurais Artificiais. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2005.
- Luck, S. J (2005). An Introduction to the Event-Related Potential Technique. Cambridge, MA, London: The Mit Press.

- Machado, A. B. M (2007). Neuroanatomia Funcional. Segunda edição. Editora Atheneu, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil.
- Millán, J. del R (2004). “On the Need for On-line Learning in Brain-Computer Interfaces”, *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*, 2877-2882.
- Nilsson, J. W e Riedel, S. A (2003). Circuitos Elétricos. Sexta edição. Editora LTC, Rio de Janeiro.
- Pardy, J; Roberts, S. e Tarassenko, L (1996). “A Review of Parametric Modeling Techniques for EEG Analysis”, *Medical Engineering & Physics*, 18(1): 2-11.
- Pfurtscheller, G. e Lopes da Silva, F. H (1999). “Event-Related EEG/MEG Synchronization and Desynchronization: Basic Principles”. Elsevier, *Clinical Neurophysiology*, 110: 1842-1857.
- Popivanov, D. e Mineva, A (1999). “Testing Procedures for Non-Stationarity and Non-Linearity in physiological signals”. *Mathematical Biosciences*, 157: 303-320.
- Rezende, S. O (2005). Sistemas Inteligentes. Editora Manole. Primeira edição.
- Rugg, M. D. e Coles, M. G. H (1996). “Electrophysiology of Mind Event-Related Brain Potentials and Cognition”. *Oxford Psychology Series*.
- Sala, F. A (2005). Mapas de Kohonem na Detecção de Eventos Epileptogênicos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Scholarpedia. Thalamocortical Oscillations. Disponível em: < http://www.scholarpedia.org/article/Thalamocortical_oscillations>. Acesso em: 20 de janeiro de 2009.
- Shlens, J (2003). A Tutorial on Principal Component Analysis: Derivation, Discussion and Singular Value Decomposition.
- Silva Junior, C. e Sasson, S. Biologia vol. 2, editora Saraiva. Apoio ao professor. Disponível em: <<http://biologiacesaresezar.editorasaraiva.com.br/biologia/site/apoioaoprofessor/apoiovolume2.cfm>>. Acesso em: 22 de janeiro de 2009.
- Tang, C; You, F; Cheng, G; Gao, D; Fu, F; Yang, G. e Dong, X (2008). “Correlation Between Structure and Resistivity Variations of the Live Human Skull”. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 55(9): 2286-2292.
- The MathWorks Inc (2000). Neural Network Toolbox User’s Guide.
- Trindade, M. J. G (2005). “A Magnetoencefalografia”. *Gazeta de Física (4-9), Instituto de Biofísica e Engenharia Biomédica, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa*.

- Vilela, A. L. M. Sistema Nervoso. Disponível em: <<http://www.afh.bio.br/nervoso/nervoso1.asp>>. Acesso em: 14 de janeiro de 2009.
- Wei, J. T (1998). “Understanding Artificial Neural Networks and Exploring their Potential Applications for the Practicing Urologist”. *Urology*, 52: 161-172.
- Wikipédia. Neurógia. Disponível em: < <http://pt.wikipedia.org/wiki/Neur%C3%B3glia> >. Acesso em: 14 de janeiro de 2009.

Apêndice A: Conceitos de Biologia

A.1 Camadas do córtex somatossensorial

O córtex cerebral contém 6 camadas de neurônios, começando com a camada I próxima a superfície do cérebro e se estendendo progressivamente para dentro do cérebro até a camada VI. Os neurônios de cada camada possuem diferentes funções, algumas funções são:

- i. Os sinais sensoriais excitam a camada IV primeiro, então o sinal se espalha pela superfície do córtex e também para as camadas abaixo;
- ii. As camadas I e II recebem entradas de sinal difusas e não específicas de centros cerebrais profundos. Essas entradas principalmente controlam o nível geral de excitabilidade das respectivas regiões estimuladas.
- iii. Os neurônios das camadas II e III enviam axônios para partes relacionadas do córtex cerebral do lado oposto do cérebro através do corpo caloso.
- iv. Os neurônios das camadas V e VI enviam axônios para partes mais profundas do sistema nervoso. Os da camada V são geralmente maiores e projetam para áreas mais distantes, tais como os gânglios basais, tronco cerebral, e a medula espinal, onde eles controlam a transmissão de sinal. Da camada VI, grande número de axônios se estendem para o tálamo, fornecendo sinais do córtex cerebral que interagem e ajudam a controlar os níveis de excitação dos sinais sensoriais que entram no tálamo (Guyton & Hall, 2006).

A.2 Potencial de repouso

Toda célula possui uma membrana para isolar o meio intra-celular do meio exterior e canais onde ocorre a troca de substâncias entre os meios. A membrana celular é formada por uma bicamada fosfolipídica, que é hidrofóbica³⁷, e os canais protéicos são formados por subunidades polipeptídicas. É a natureza dos radicais dos aminoácidos³⁸ que compõem os polipetídeos³⁹ que, por sua vez, compõem as subunidades dos canais protéicos que ocasiona a propriedade de seletividade iônica do

³⁷ Compostos que não se dissolvem em água, devido sua distribuição apolar (Bear, et al., 2008).

³⁸ Os aminoácidos são os blocos construtores das proteínas. São formados por um carbono alfa central, um grupamento amino (NH_3^+), um grupamento carboxila (COO^-) e um radical R (Bear, et al., 2008).

³⁹ Um polipeptídeo é uma cadeia única de aminoácidos ligados por ligações peptídicas. Existem 20 principais aminoácidos utilizados pelos neurônios para formarem as proteínas (Bear, et al., 2008).

canal, chamado canal iônico. Os principais canais iônicos são os canais de potássio, os canais de sódio e os canais de cálcio (Bear, et al., 2008)

O K^+ está mais concentrado no meio intracelular e o Na^+ e Ca^{2+} estão mais concentrados no meio extracelular. Essa diferença de concentração é estabelecida pela bomba de sódio e potássio (Figura A.1 - Esquerda) e pela bomba de cálcio. A bomba de sódio e potássio é uma enzima que hidrolisa ATP na presença de sódio intracelular. A energia química dessa reação impele a troca de sódio intracelular por potássio extracelular contra seus respectivos gradientes de concentração. Estima que a bomba de sódio e potássio gaste até 70% da quantidade total de ATP utilizada no encéfalo. A bomba de cálcio é uma enzima que transporta ativamente Ca^{2+} para fora da célula.

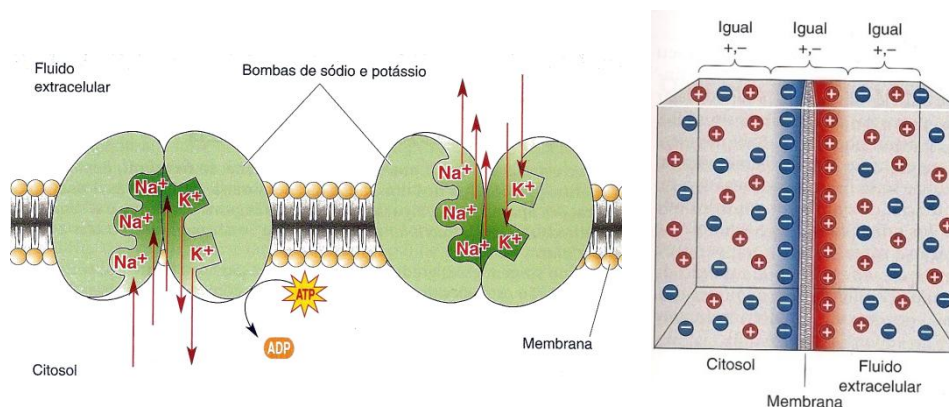


Figura A.1 – Esquerda: Funcionamento da bomba de sódio e potássio; Direita: Distribuição de carga elétrica através da membrana (Bear, et al., 2008).

Os íons são impelidos pelos canais iônicos devido às diferenças de concentração entre o meio intracelular e extracelular. Mas, a membrana celular do neurônio é 40 vezes mais permeável ao K^+ do que ao Na^+ , assim, a quantidade de cargas positivas diminui no interior da célula, tornando seu potencial relativamente negativo.

Em função de a membrana celular ser muito fina, é possível que os íons de um lado interajam eletrostaticamente com os íons do outro lado. Dessa maneira, a carga negativa do interior da célula não é distribuída igualmente pelo citosol⁴⁰, mas, ao contrário, é localizada na face interna da membrana (Figura A.1 - Direita) e a maior parte do citosol é eletricamente neutro. Desse modo, diz-se que a membrana armazena carga elétrica, uma propriedade chamada capacitância (Bear, et al., 2008)

⁴⁰ Fluido aquoso do interior da célula (Bear, et al., 2008)

Então, um estado de equilíbrio é atingido quando a força elétrica (atraindo os íons K^+ de volta para o interior da célula) e a força de difusão (devido à maior concentração do íon K^+ no interior da célula) são iguais e opostas. A diferença de potencial elétrico que contrabalança exatamente um gradiente de concentração iônico é chamada de potencial de equilíbrio (Bear, et al., 2008) Cada íon tem seu próprio potencial de equilíbrio, calculado pela equação de Nernst:

$$E_{ion} = 2,303 \cdot \frac{R \cdot T}{z \cdot F} \cdot \log \frac{[ion]_e}{[ion]_i} \quad (A.1)$$

Em que R é a constante dos gases, T é a temperatura absoluta, z é a carga do íon, F é a constante de Faraday, $[ion]_e$ é a concentração iônica extracelular e $[ion]_i$ é a concentração iônica intracelular (Bear, et al., 2008)

O potencial de repouso da membrana é dado pela permeabilidade relativa da membrana. Se as permeabilidades relativas são conhecidas é possível calcular o potencial da membrana no equilíbrio através da equação de Goldman:

$$V_m = 61,54 \cdot \log \frac{P_K [K^+]_e + P_{Na} [Na^+]_e}{P_K [K^+]_i + P_{Na} [Na^+]_i} \quad (A.2)$$

Em que P_K e P_{Na} são as permeabilidades relativas do K^+ e do Na^+ , respectivamente, e os outros termos são os mesmos da equação de Nernst. Medidas as concentrações de K^+ e do Na^+ no interior e no exterior da célula: $[K^+]_e = 5mM$, $[K^+]_i = 100mM$, $P_{Na}[K^+]_e = 150mM$, $P_{Na}[K^+]_e = 15mM$, pode-se substituir na equação (A.2). Em que a permeabilidade relativa do K^+ é 40 vezes maior que a permeabilidade relativa do Na^+ .

$$V_m = 61,54 \cdot \log \frac{40 \cdot (5) + 1 \cdot (50)}{40 \cdot (100) + 1 \cdot (15)} = -65mV \quad (A.3)$$

Que corresponde ao potencial da membrana celular de um neurônio em repouso, ou seja, o potencial de repouso do neurônio (Bear, et al., 2008)

A.3 Potencial de ação

Os potenciais de ação constituem o código utilizado pelo neurônio para transmitir informação de um local a outro. O potencial de ação é uma rápida inversão da polaridade da membrana celular, ou seja, por um instante, o lado citosólico da membrana torna-se carregado positivamente com relação ao lado externo (Figura A.2).

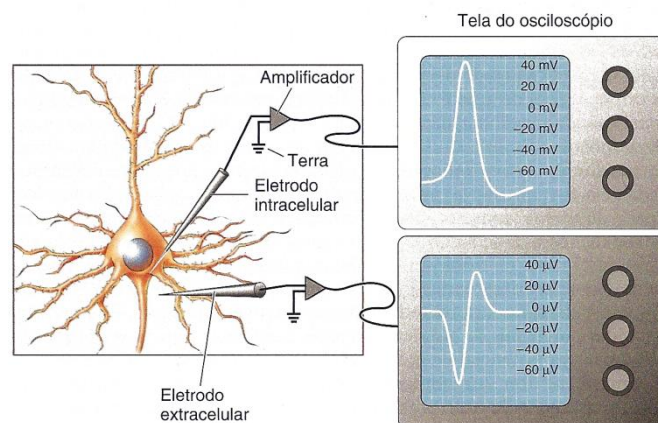


Figura A.2 – Potencial de Ação (Bear, et al., 2008)

Os potenciais de ação gerados por uma célula são todos similares em tamanho e duração e não diminuem à medida que são conduzidos ao longo do axônio. Se a despolarização da membrana alcança um nível crítico, chamado potencial de limiar, ocorrerá um potencial de ação.

A despolarização que causa potenciais de ação é alcançada de formas diferentes em diferentes neurônios. Nos neurônios sensoriais existem canais iônicos sensíveis à distensão da membrana que permitem a entrada de Na^+ . Nos interneurônios a despolarização é normalmente causada pela entrada de Na^+ através de canais ativados por neurotransmissores liberados por outros neurônios. Além dos mecanismos naturais, os neurônios também podem ser despolarizados pela injeção de uma corrente elétrica através de um microeletrodo.

A frequência e o padrão dos potenciais de ação constituem o código utilizado pelos neurônios para transferir informação. A frequência de disparo dos potenciais de ação reflete a magnitude da corrente despolarizante (Figura A.3). Embora a frequência de disparo aumente com a quantidade de corrente despolarizante, existe um limite para a taxa no qual um neurônio possa gerar potenciais de ação. A frequência máxima de disparo é cerca de 1000Hz, e uma vez iniciado um potencial de ação é impossível gerar

outro durante cerca de 1ms. Esse período de tempo é chamado de período refratário absoluto (Bear, et al., 2008)

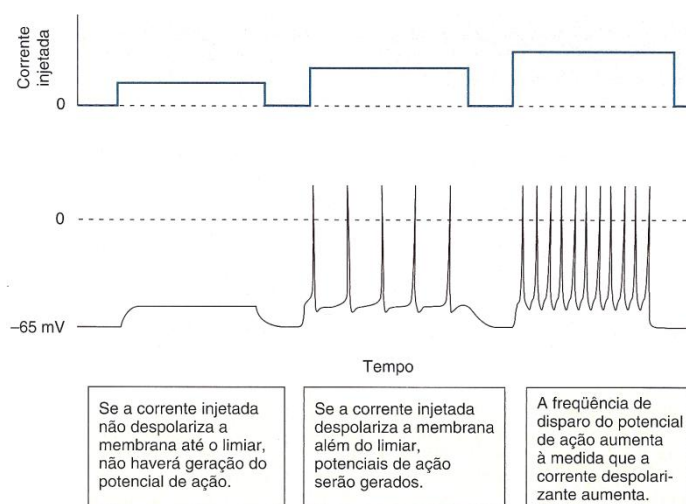


Figura A.3 – Codificação dos potenciais de ação emitidos pelo neurônio (adaptado de Bear, et al., 2008)

A.4 Potencial de limiar

A propagação do potencial de ação no axônio envolve a excitação de canais voltagem-dependentes, que existem juntamente com as bombas de sódio e potássio e os canais iônicos. Agora descreveremos os canais de sódio voltagem-dependentes e os canais de potássio voltagem-dependentes vinculados ao potencial de limiar. Esses canais alteram sua forma espacial permitindo ou não a passagem dos respectivos íons em resposta a um estímulo elétrico (Bear, et al., 2008)

O canal de sódio voltagem-dependente é formado por um único polipeptídeo que forma quatro domínios que se agrupam formando um poro. Cada domínio é composto por seis segmentos, numerados de S1 a S6. No segmento S4 existe um sensor de voltagem que fecha o portão do canal quando o potencial da membrana celular muda atingindo um potencial em torno de -40mV.

Na região S4 do polipeptídeo, resíduos de aminoácidos carregados positivamente estão posicionados regularmente, assim, o segmento inteiro é forçado a se mover em reação a diminuição da negatividade da membrana, fechando o canal.

O canal de potássio voltagem-dependente tem uma estrutura similar ao canal de sódio voltagem-dependente. É formado por quatro subunidades polipeptídicas separadas que se reúnem formando um poro. De forma semelhante aos canais de sódio, essas proteínas são sensíveis à mudança no campo elétrico presente na membrana.

O processo para a propagação de um potencial de ação está descrito nos seis passos abaixo:

- i. No potencial de repouso de membrana, os canais de repouso de potássio estão abertos, mas os canais voltagem-dependentes de sódio estão fechados.
- ii. Uma despolarização local de membrana causada por um estímulo excitatório causa a abertura de alguns canais de sódio voltagem-dependentes na membrana plasmática do neurônio. A difusão de íons de sódio por esses canais causa um aumento de voltagem da membrana. O gradiente químico se mantém durante todo tempo, pois a concentração de sódio no meio extracelular é muito maior do que a do meio intracelular.
- iii. À medida que os íons de sódio entram na célula e o potencial de membrana vai ficando menos negativo, mais canais de sódio voltagem-dependentes se abrem, causando um influxo de íons de sódio cada vez maior. Esse é um exemplo de realimentação positiva. Quanto mais canais de sódio se abrem, mais a entrada de sódio predomina sobre a saída de potássio pelos canais iônicos e o potencial de membrana se torna positivo.
- iv. Uma vez que o potencial de membrana atinge +40mV, comportas inibitórias voltagem-dependentes dos canais de sódio se fecham, porque são ativadas por potenciais de membrana positivos. Assim, o influxo de íons de sódio cessa. Concomitantemente, os canais de potássio voltagem-dependentes começam a se abrir.
- v. Quando os canais voltagem-dependentes de potássio se abrem, inicia-se um grande movimento de saída de íons de potássio, estimulado pelo gradiente de concentração de potássio e favorecido inicialmente pelo potencial positivo da membrana. À medida que os íons de potássio se difundem para o meio extracelular, o movimento de cátions causa a reversão do potencial de membrana para negativo. É a repolarização do neurônio, de volta ao potencial de repouso de membrana (-65mV).
- vi. A grande corrente de saída de íons de potássio pelos canais voltagem-dependentes de potássio gera temporariamente um potencial mais negativo do que o potencial de repouso de membrana. Esse fenômeno é conhecido como hiperpolarização de membrana. Nesse ponto, as comportas inibitórias dos canais voltagem-dependentes de potássio se fecham e o potencial de membrana volta a ser comandado pelos canais iônicos de potássio. As bombas de sódio e potássio

continuam bombeando íons de sódio para fora e íons de potássio para dentro, prevenindo, dessa forma, a perda do potencial de repouso de membrana a longo prazo. O potencial de repouso de -65 mV é reestabelecido e o neurônio é considerado repolarizado.

Para que ocorra a propagação de um potencial de ação pelo axônio, é necessária uma reação em cadeia de abertura de canais de sódio voltagem-dependentes. Para que a reação em cadeia tenha início, é necessário que um número de mínimo canais de sódio voltagem-dependentes seja aberto.

Se o número mínimo não for alcançado, os canais de repouso e as bombas de sódio e potássio re-estabilizarão o potencial de repouso da membrana e o potencial de ação será totalmente atenuado. Caso o número mínimo seja alcançado uma reação em cadeia irreversível propagará o potencial de ação por todo o axônio, chamado de “princípio do tudo ou nada”.

O valor mínimo de polarização da membrana, que ativa a abertura do número mínimo de canais de sódio voltagem-dependentes necessários para a propagação do potencial de ação é chamado valor de limiar e está em torno de -45mV . Nesse valor o fluxo de íons através dos canais de sódio voltagem-dependentes é maior que o fluxo reverso nos canais de repouso e nas bombas de sódio e potássio.

A.5 A condução do potencial de ação

Um potencial de ação iniciado em uma extremidade do axônio apenas se propaga em um sentido porque a membrana por onde passou está refratária como resultado da inativação dos canais de sódio recém utilizados (Figura A.4 - Esquerda).

A velocidade de propagação do impulso nervoso na membrana de um neurônio varia em torno de 10m/s . A propagação rápida dos impulsos nervosos é garantida pela presença da bainha de mielina que recobre as fibras nervosas. A bainha de mielina é constituída por camadas concêntricas de membranas plasmáticas de células da glia, os oligodendrócitos.

Entre as células gliais que envolvem o axônio existem pequenos espaços onde os íons podem cruzar a membrana para gerar potenciais de ação, que são os nódulos de Ranvier. Canais de sódio voltagem-dependentes estão concentrados na membrana desses nodos e o impulso nervoso se propaga de um nódulo de Ranvier para o outro.

Esse tipo de propagação do potencial de ação é chamado condução saltatória (Figura A.4 - Direita).

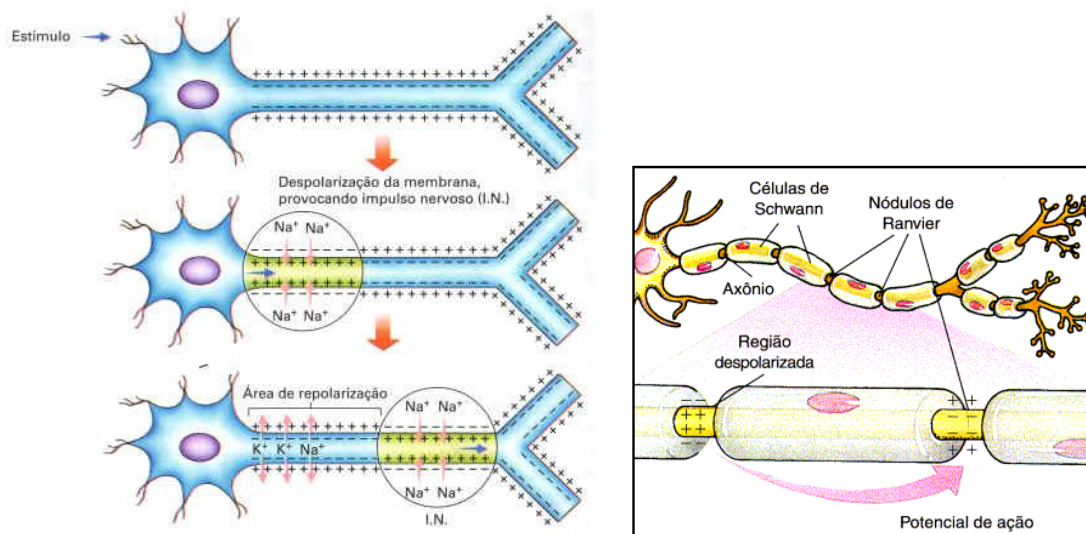


Figura A.4 –Esquerda: Potencial de Ação transmitido através do axônio (Vilela, 2009); Direita: Condução saltatória do potencial de ação (Estébanez, 2003).

As membranas dos dendritos e dos corpos celulares não geram potenciais de ação porque possuem muito poucos canais de sódio voltagem-dependentes. Apenas membranas que possuem essas moléculas protéicas especializadas são capazes de gerar potenciais de ação, e esse tipo de membrana excitável é normalmente encontrada apenas em axônios.

Assim sendo, a parte do neurônio onde o axônio se origina do soma, chamado cone de implantação axonal, também é freqüentemente chamada de zona de disparo. Em um neurônio típico no encéfalo a despolarização dos dendritos e do soma causada pelo estímulo sináptico de outros neurônios leva a geração de potenciais de ação se a membrana do cone de implantação axonal for despolarizada além do limiar (Figura A.5).

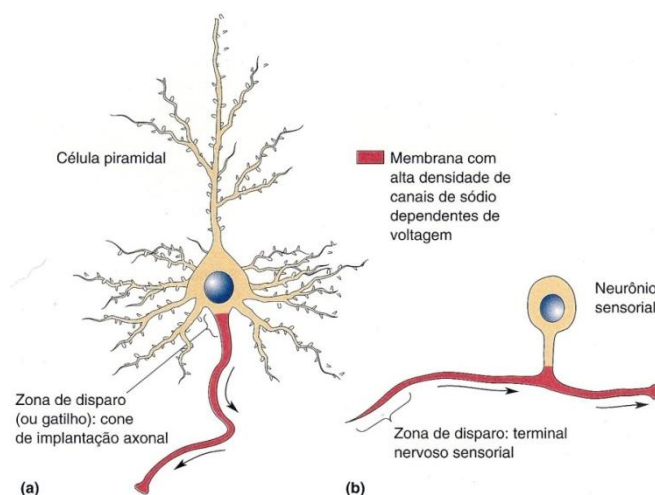


Figura A.5 – Zona de disparo de um neurônio piramidal e um neurônio sensorial (Bear, et al., 2008)

A.6 Liberação de neurotransmissores

A liberação de neurotransmissores é desencadeada pela chegada de um potencial de ação ao terminal axonal. A despolarização da membrana do terminal causa a abertura de canais de cálcio voltagem-dependentes nas zonas ativas. A concentração interna do íon de cálcio é muito pequena, $[Ca^{2+}]_i$, é muito baixa no repouso, portanto, quando os canais de cálcio estiverem abertos o Ca^{2+} encherá o citoplasma do terminal axonal. A elevação resultante da $[Ca^{2+}]_i$ é o sinal que causa a liberação de neurotransmissores das vesículas sinápticas (Bear, et al., 2008)

Os neurotransmissores liberados na fenda sináptica afetam os neurônios pós-sinápticos por se ligarem a proteínas receptoras específicas que estão embutidas nas densidades pós-sinápticas⁴¹. Receptores conhecidos como canais iônicos ativados por transmissores são proteínas transmembrana compostas por quatro ou cinco subunidades, que, juntas, formam um poro. Na ausência do neurotransmissor, o poro do receptor está freqüentemente fechado. Quando o neurotransmissor se liga a sítios específicos da região extracelular do canal, ele induz uma mudança conformacional que causa a abertura do poro (Vilela, 2009).

Se o neurotransmissor tende a levar o potencial da membrana mais para perto do limiar capaz de gerar o potencial de ação, o efeito é dito excitatório. Uma despolarização transitória da membrana pós-sináptica causada por uma liberação pré-

⁴¹ Densidade pós-sináptica é um termo que se refere à extensa camada protéica na e sob a membrana pós-sináptica [41].

sináptica de neurotransmissores é denominada potencial excitatório pós-sináptico (PEPS) (Figura A.6).

A ativação sináptica de canais iônicos abertos por acetilcolina e por glutamato permitem a entrada do íon Na^+ no dendrito pós-sináptico. A entrada de Na^+ torna a membrana celular menos negativa e, portanto, mais próxima do limiar para emitir um PA.

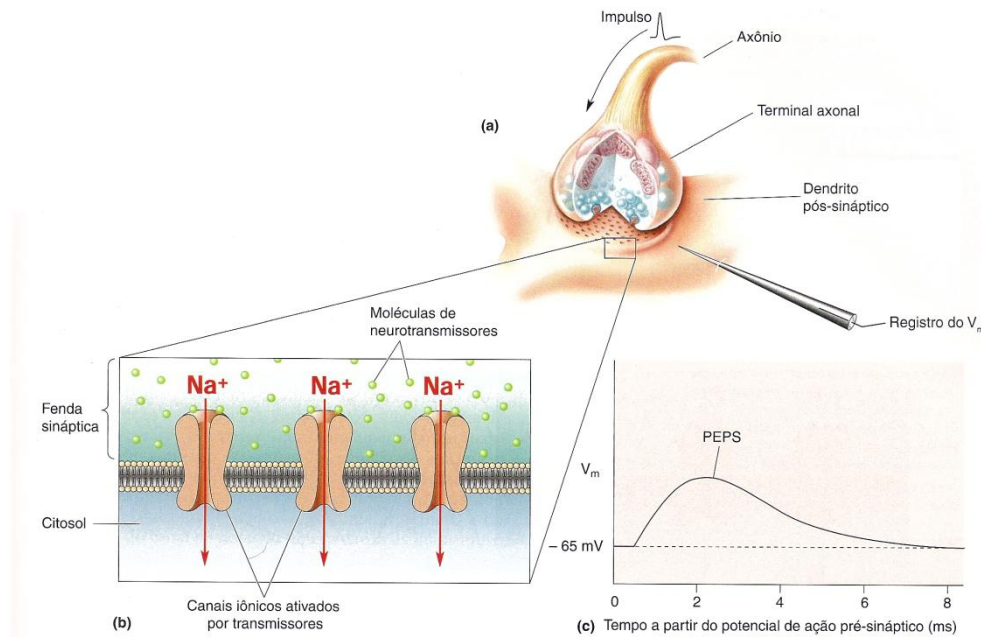


Figura A.6 –Geração de um potencial excitatório pós-sináptico (PEPS) (Bear, et al., 2008)

Se os canais iônicos dependentes de transmissores são permeáveis ao Cl^- , o efeito resultante será a hiperpolarização da membrana da célula pós-sináptica a partir do potencial de repouso. Pois, a entrada de Cl^- torna a membrana celular mais negativa e, portanto, mais distante do limiar para emitir um PA. Como o neurotransmissor tende a afastar o potencial da membrana do limiar da geração do potencial de ação, esse efeito é dito inibitório (Figura A.7).

Uma hiperpolarização transitória da membrana pós-sináptica causada por uma liberação pré-sináptica de neurotransmissores é denominada potencial inibitório pós-sináptico (PIPS). A ativação sináptica de canais iônicos abertos por glicina e por GABA causam PIPS.

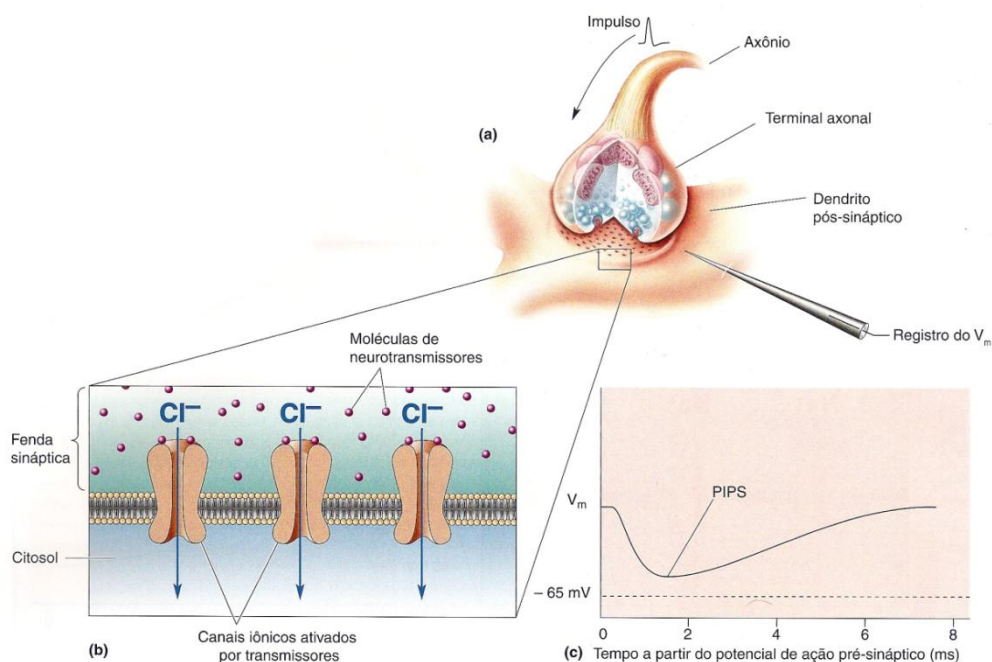


Figura A.7 –Geração de um potencial inibitório pós-sináptico (PIPS) (Bear, et al., 2008)

Além dos canais iônicos ativados por transmissores, a transmissão sináptica química pode ser mediada por receptores acoplados à proteína G^{42} . A maioria dos receptores acoplados à proteína G são polipeptídeos com 7 segmentos de alfa-hélice atravessando a membrana. Duas alças extracelulares do polipeptídeo formam os sítios de ligação do transmissor (Bear, et al., 2008) Esse tipo de ação do neurotransmissor envolve 3 passos:

- i. O neurotransmissor liga-se a ao receptor na membrana pós-sináptica;
- ii. O receptor protéico ativa pequenas proteínas, denominadas proteínas G, as quais se movem livremente ao longo da face intracelular da membrana pós-sináptica;
- iii. As proteínas G ativadas, por sua vez ativam proteínas efetoras.

As proteínas efetoras podem ser canais iônicos (ativados por proteínas G) presentes na membrana (Figura A.8 – (a)) ou podem ser enzimas que sintetizam moléculas denominadas segundos mensageiros que se difundem para o citosol (Figura A.8 – (b)). Segundos mensageiros podem ativar enzimas adicionais no citosol que, por sua vez, podem regular canais iônicos e alterar o metabolismo celular.

⁴² Abreviação de proteína ligante de guanosina trifosfato (Bear, et al., 2008)

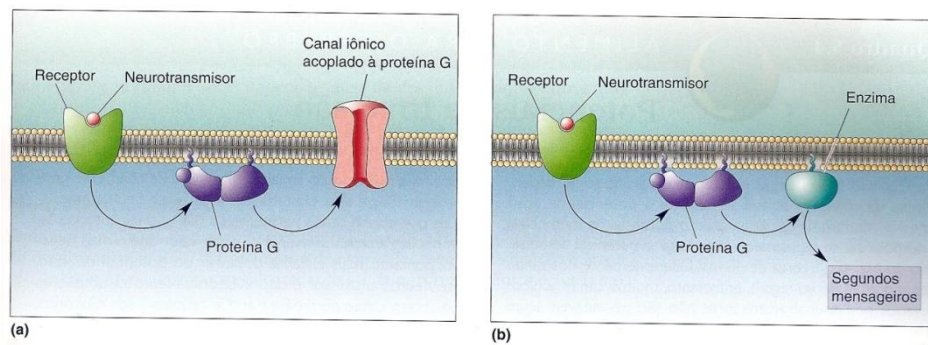


Figura A.8 –Ações de neurotransmissores em receptores acoplados a proteínas G. (a) Canais iônicos; (b) Enzimas que geram segundos mensageiros intracelulares (Bear, et al., 2008)

Canais iônicos ativados por transmissores são receptores classificados como ionotrópicos, pois permitem a entrada de íons como, Na^+ , K^+ e Cl^- . Os receptores acoplados à proteína G são classificados como metabotrópicos, pois desencadeiam uma série de eventos intra-celulares envolvendo canais iônicos ativados por proteínas G, ou segundos mensageiros.

A.7 Integração Sináptica

A maioria dos neurônios do SNC recebe milhares de sinais de entrada sinápticos que ativam diferentes combinações de canais iônicos ativados por transmissores. Os neurônios pós-sinápticos integram todo esse complexo de sinais químicos e iônicos e dão origem a uma única forma de sinal de saída: potenciais de ação. A integração sináptica é o processo pelo qual múltiplos potenciais sinápticos se combinam em um neurônio pós-sináptico.

A somação dos PEPSs representa a mais simples forma de integração sináptica no SNC. Há dois tipos de somação: espacial e temporal. A somação espacial consiste em adicionar PEPSs gerados simultaneamente em muitas sinapses em um dendrito. A somação temporal consiste em adicionar PEPSs gerados numa mesma sinapse e que ocorrem em uma rápida sucessão, dentro de intervalos de 1 a 15 ms (Bear, et al., 2008)

A figura A.9 mostra uma somação de PEPSs. Em (a) um potencial de ação pré-sináptico desencadeia um pequeno PEPSs no neurônio pós-sináptico. (b) mostra a formação espacial do PEPSs. Quando dois ou mais sinais de entrada são simultâneos, seus PEPSs individuais se somam. (c) mostra a somação temporal de PEPSs. Quando

uma mesma fibra pré-sináptica dispara potenciais de ação em uma rápida sucessão, seus PEPSs individuais se somam.

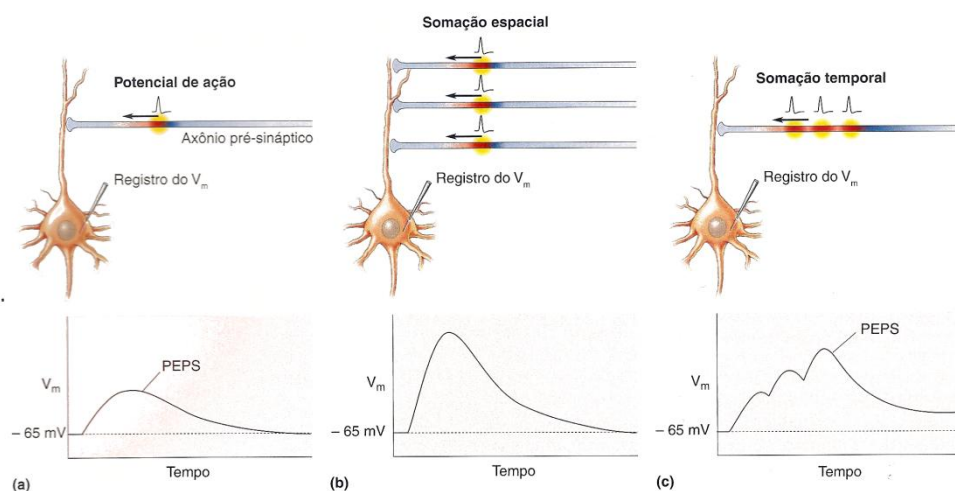


Figura A.9 – Somação de PEPSs (Bear, et al., 2008)

Dessa forma, a codificação de um potencial de ação em trens de pulso ocasiona uma somação temporal de PEPSs que facilita a despolarização da membrana do cone de implantação axonal do neurônio pós-sináptico até o limiar.

A figura A.10 mostra o princípio do “tudo ou nada”. Em (A) o potencial de ação do neurônio pré-sináptico gera um único potencial pós-sináptico excitatório (PPSE) que não consegue despolarizar a membrana do cone de implantação axonal do neurônio pós-sináptico até o limiar. Em (B) o trem de PAs gera um PPSE que consegue despolarizar a membrana do cone de implantação axonal do neurônio pós-sináptico até o limiar fazendo com que o neurônio pós-sináptico transmita um PA.

A ação das sinapses inibitórias também contribuem para a integração sináptica. Os PIPSs podem ser subtraídos dos PEPSs, diminuindo a probabilidade de os neurônios pós-sinápticos dispararem um potencial de ação. Se a sinapse inibitória estiver entre a sinapse excitatória e o cone de implantação axonal, o potencial mais negativo do PIPS representa um caminho de menor resistência para a corrente iônica positiva gerada pelo PEPS.

Nesse caso a corrente iônica positiva do PEPS não alcançará o cone de implantação axonal. Esse tipo de inibição é chamado inibição por derivação, pois o PIPS age como um circuito de derivação elétrico (Bear, et al., 2008)

Os dendritos, de forma contrária aos axônios, proporcionam uma resistência interna à propagação dos potenciais pós-sinápticos (PPSs). A atenuação dos PPSs é proporcional ao comprimento e diâmetro do dendrito.

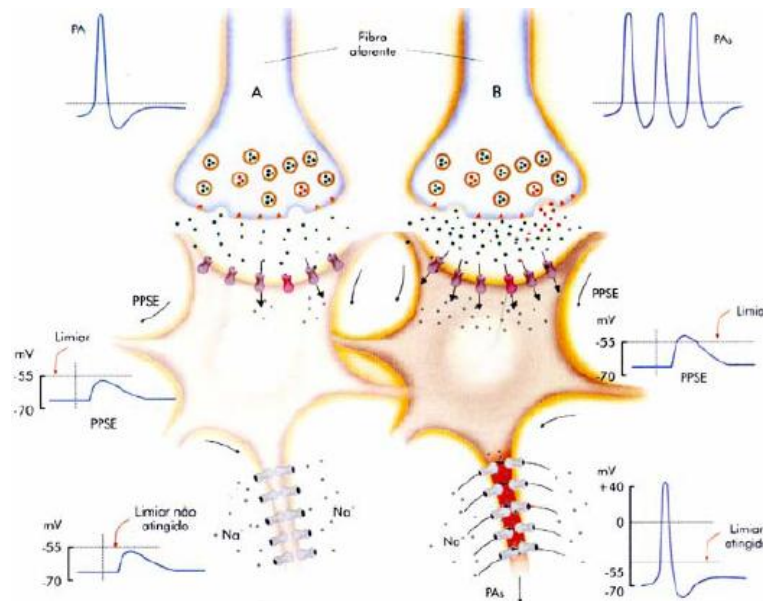


Figura A.10 – Princípio do “tudo ou nada”.

A.8 Sistema nervoso vegetativo

O SNV é formado por agrupamento de corpos celulares de neurônios motores viscerais chamados gânglios do SNV, que se localizam fora do SNC. Os neurônios nesses gânglios são chamados neurônios pós-ganglionares e são controlados por neurônios pré-ganglionares, cujos corpos celulares situam-se na medula espinhal e no tronco encefálico (Bear, et al., 2008)

Os neurônios pré-ganglionares da divisão simpática situam-se na substância cinzenta intermediolateral da medula espinhal e enviam axônios através das raízes ventrais para estabelecer sinapses com neurônios nos gânglios da cadeia simpática. Os neurônios pré-ganglionares da divisão parassimpática situam-se em vários núcleos no tronco encefálico e na porção sacral da medula espinhal, e seus axônios são enviados através de diversos nervos cranianos e nervos da porção sacral da medula espinhal.

O principal neurotransmissor dos neurônios neurovegetativos pré-ganglionares de ambas as divisões, simpática e parassimpática, é a acetilcolina (ACh). Os neurônios pós-ganglionares utilizam neurotransmissores diferentes nas divisões simpática e parassimpática. Neurônios pós-ganglionares parassimpáticos liberam ACh e a maioria

dos neurônios pós-ganglionares simpáticos liberam noradrenalina (NA) (Bear, et al., 2008)

A.9 Características do olho humano

O olho humano possui células fotossensíveis na retina chamadas cones e bastonetes. Os cones são células capazes de reconhecer cores. Existem 3 tipos de cone, e cada cone possui sensibilidade máxima para um comprimento de onda específico de luz, possibilitando a visão tricromática⁴³. Os bastonetes são células que conseguem ser estimulados em baixos níveis de luminosidade e são basicamente responsáveis pela visão noturna, sendo 100 vezes mais sensíveis à luz que os cones.

A figura A.11 mostra as principais características do olho humano e também mostra a organização laminar da retina humana. Pode-se verificar que a luz atinge primeiramente a camada de células ganglionares e depois os cones e bastonetes que estão na camada nuclear externa. A sensibilidade à luz ocorre nas várias camadas sobrepostas na extremidade dos cones e bastonetes, mostrados na camada de segmentos externos dos fotorreceptores (Bear, et al., 2008)

Dessa forma, mesmo que o fóton não seja absorvido na primeira camada, ele pode ser captado na segunda ou terceira, e assim por diante. O que torna o fotorreceptor muito sensível a presença de fótons, podendo detectar até mesmo a colisão de um único fóton.

A sensibilidade das células fotorreceptoras à luz se deve a existência de proteínas chamadas opsinas nas várias camadas de segmentos externos. Os cones possuem a proteína fotopsina I que absorve luz no espectro amarelo, fotopsina II que absorve luz no espectro verde e a fotopsina III que absorve luz no espectro violeta (Figura A.12), e essa é a base da visão a cores. Os bastonetes possuem a proteína rodopsina que absorve luz no espectro verde azulado.

⁴³ O físico britânico Thomas Young mostrou em 1802 que todas as cores do arco-íris poderiam ser formadas por uma mistura de 3 cores básicas (vermelho, verde e azul). Ele propôs com bastante acerto que em cada ponto da retina existe um conjunto de 3 tipos de receptores, cada um com sensibilidade máxima a uma cor básica. Posteriormente, suas idéias foram defendidas pelo fisiologista alemão Hermann Von Helmholtz, e essa concepção acerca da visão das cores veio a ser conhecida como teoria tricromática de Young-Helmholtz (Bear, et al., 2008)

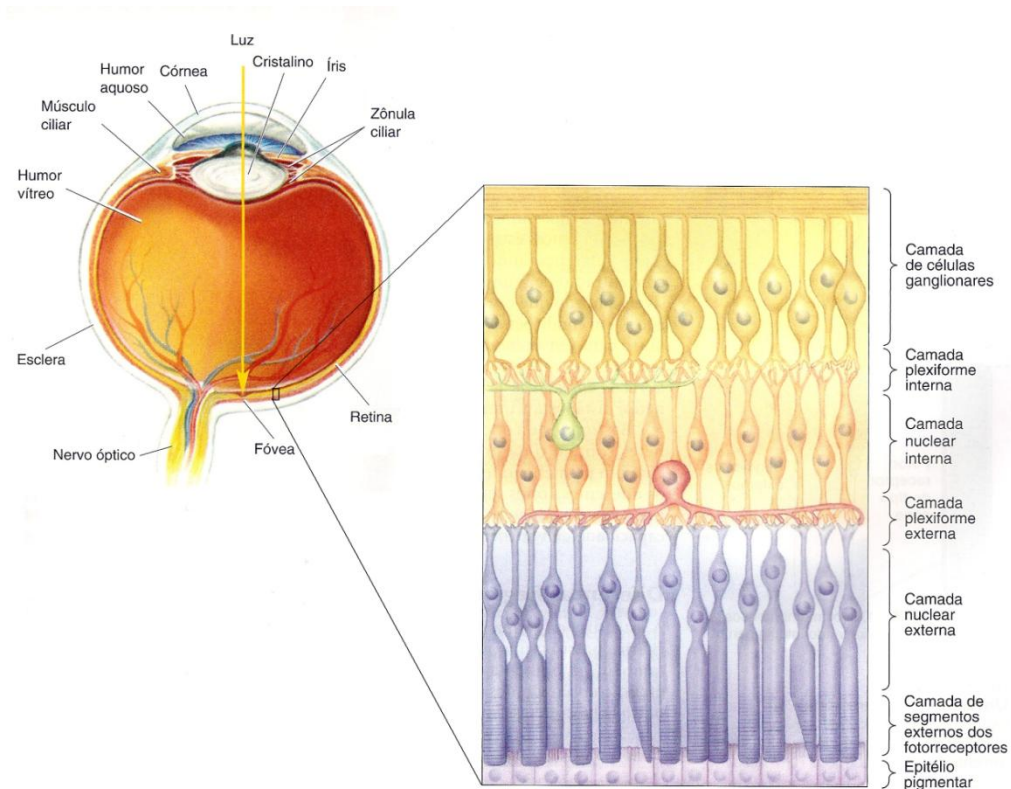


Figura A.11 – Organização laminar da retina humana (adaptado de (Bear et al., 2008)).

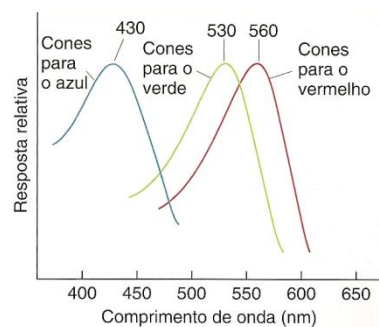


Figura A.12 – Sensibilidade espectral dos três tipos de pigmentos dos cones (cone azul, cone verde e cone vermelho) (Bear, et al., 2008)

A rodopsina consta de uma parte protéica, a opsina, formada por aproximadamente 348 aminoácidos que formam 7 segmentos alfa-hélice transmembrana e uma parte não protéica, uma pequena molécula derivada da vitamina-A, chamada de retinal.

Resumidamente, quando o fóton de luz atinge o retinal da rodopsina, ele sofre uma alteração em sua conformação que ativa a opsina (Figura A.13). Nesse estado a rodopsina estimula uma proteína G denominada transducina, e essa por sua vez, ativa a enzima fosfodiesterase (do inglês, Phosphodiesterase - PDE). A PDE hidroliza o

segundo mensageiro monofosfato de guanosina cíclico (GMPc). A redução nas concentrações de GMPc determina o fechamento dos canais de Na^+ e a hiperpolarização da membrana.

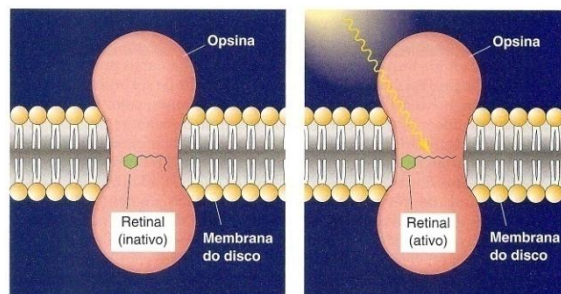


Figura A.13 – Ativação da rodopsina pela luz (Bear, et al., 2008)

Quando o bastonete está no escuro, o GMPc é produzido continuamente no fotorreceptor, mantendo os canais de Na^+ abertos. A abertura dos canais de Na^+ provoca um movimento de cargas positivas no interior da membrana, chamada corrente do escuro que despolariza a membrana do potencial de repouso (-65mV) para -30mV .

Como dito anteriormente, a presença de luz reduz a quantidade de GMPc, o que determina o fechamento dos canais de Na^+ e o potencial da membrana torna-se mais negativo (Figura A.14).

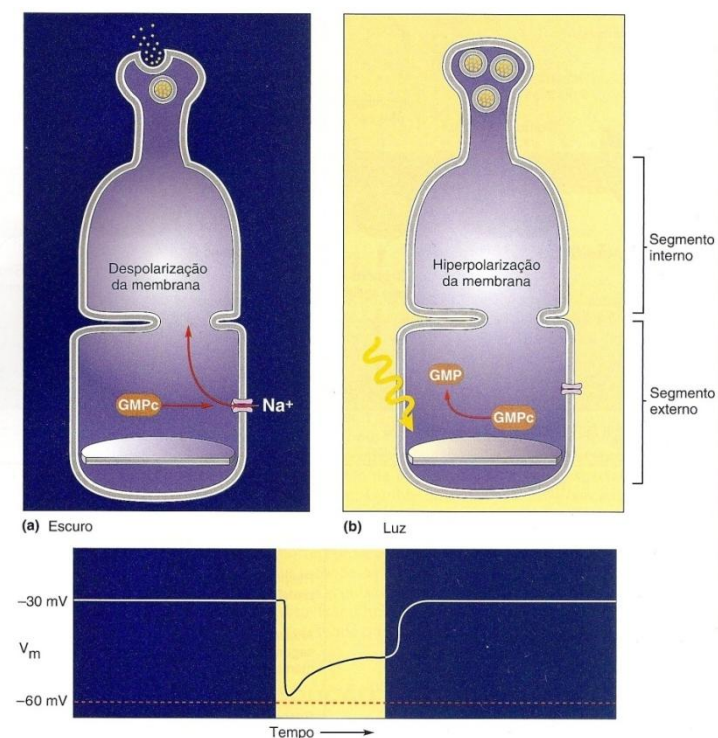


Figura A.14 –Hiperpolarização dos fotorreceptores em resposta à luz (Bear, et al., 2008)

Os fotorreceptores, assim como outros neurônios, liberam neurotransmissores quando despolarizados. O transmissor liberado pelas células fotorreceptoras é o aminoácido glutamato. Temos assim uma situação contrária a esperada: os fotorreceptores estão despolarizados no escuro e se tornam hiperpolarizados na presença de luz.

Cada neurônio fotorreceptor efetua contatos sinápticos com interneurônios retinianos (células bipolares, células horizontais e células amácrinas – Figura A.13) formando circuitos que se ligam às células ganglionares, as quais projetam seus axônios para fora do olho por meio do nervo óptico.

A.10 Processamento da visão

Os axônios das células ganglionares que partem da retina formam o nervo óptico. Parte das fibras dos nervos ópticos de ambos os olhos decussam no quiasma óptico⁴⁴ e prosseguem pelos tractos ópticos para o núcleo geniculado lateral do tálamo (NGL). Os neurônios do NGL projetam axônios para o córtex visual primário, e essa projeção é chamada radiação óptica (Figura A.15) (Bear, et al., 2008)

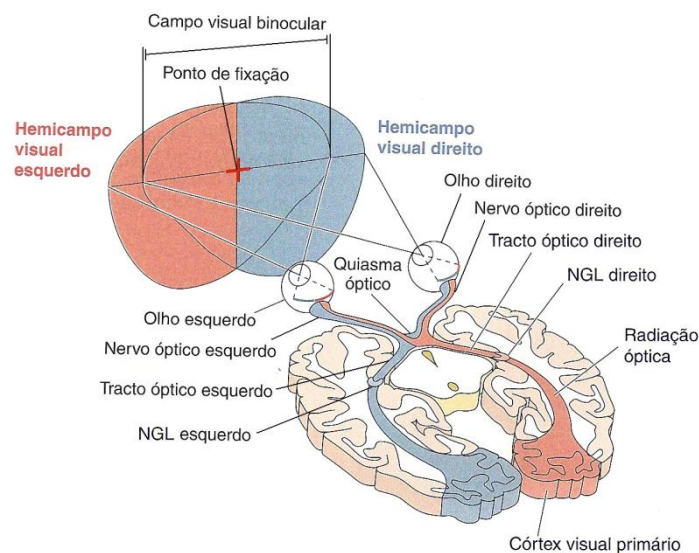


Figura A.15 – Via visual que permeia a percepção visual consciente (adaptado de (Bear et al., 2008)).

Observe na figura A.15 que o campo visual é dividido em duas metades. A metade esquerda é chamada hemicampo visual esquerdo e a metade direita é chamada

⁴⁴ Assim denominado em função de sua forma em “X”, correspondendo à letra *qui* em grego (Bear et al., 2008).

hemisfério visual direito. As fibras da retina que percebem cada hemisfério são analisadas separadamente e nomeadas de retina nasal e retina temporal. Observe que os objetos no hemisfério visual esquerdo são analisados na retina nasal do olho esquerdo e na retina temporal do olho direito (Bear, et al., 2008)

As fibras da retina nasal se cruzam no quiasma óptico, dessa forma, o hemisfério visual esquerdo é analisado no córtex visual primário do hemisfério direito e o hemisfério visual direito é analisado no córtex visual primário do hemisfério esquerdo (Bear, et al., 2008) Pode-se perceber que o processamento da informação visual de um olho ocorrerá em ambos os hemisférios cerebrais.

Os núcleos geniculados laterais direito e esquerdo são formados por 6 camadas de células sobrepostas que se curvam ao redor do tracto óptico. O NGL recebe informação sobre o campo visual esquerdo. O campo visual esquerdo é visto tanto pela retina nasal do olho esquerdo quanto pela retina temporal do olho direito.

No NGL, sinais oriundos dos dois olhos são mantidos em camadas separadas. As camadas 1, 4 e 6 estabelecem sinapses com axônios do olho disposto contralateralmente. As camadas 2, 3 e 5 estabelecem sinapses com axônios do olho disposto ipsilateralmente (Figura A.16 - Esquerda). Entre as camadas existe uma fina camada chamada camada coniocelular que se liga ao tracto óptico da mesma forma que a camada principal superposta, mas recebe informação de um diferente tipo de célula ganglionar da retina (Bear, et al., 2008)

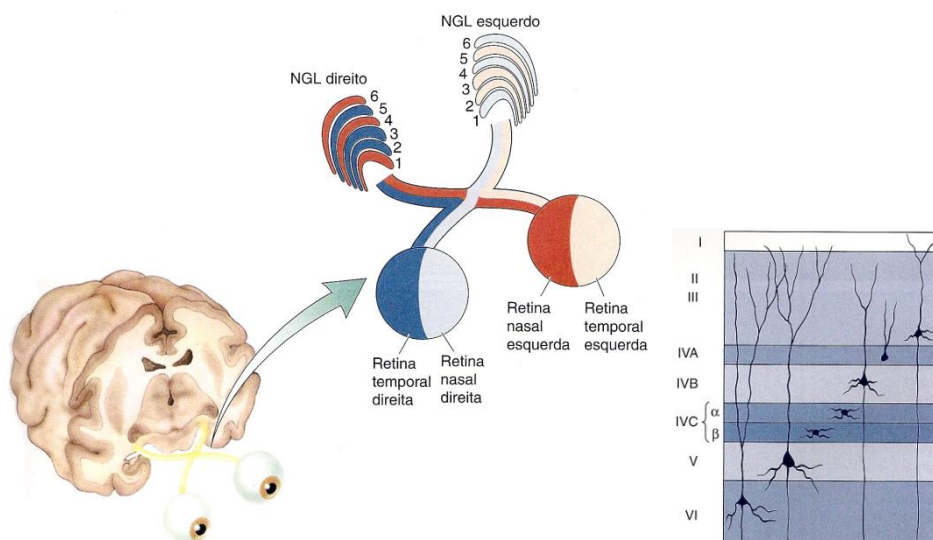


Figura A.16 – Esquerda: Eferências da retina às camadas no NGL (Bear, et al., 2008); Direita: Morfologia dendrítica de algumas células no córtex estriado (Bear, et al., 2008).

Os axônios oriundos do NGL terminam em diversas camadas do córtex visual primário, também denominado de V1 ou córtex estriado⁴⁵. O córtex estriado possui 2 mm de espessura, e é subdividido em 6 camadas. A camada 4 é formada por 3 subcamadas, chamadas IVA, IVB e IVC. A camada IVC é por sua vez subdividida em duas subcamadas chamadas IVC α e IVC β . As células piramidais são encontradas nas camadas II, III, IVB, V e VI. Células estreladas espinhosas são encontradas na camada IVC (Figura A.16 - Direita).

Os axônios provenientes das camadas 1 e 2 do NGL projetam-se para a camada IVC α , e os axônios provenientes das camadas 3 a 6 do NGL projetam-se para a camada IVC β . Os axônios das camadas coniocelulares do NGL estabelecem sinapses nas camadas II e III (Bear, et al., 2008)

As células estreladas da camada IVC projetam axônios radialmente para cima, para as camadas IVB e III, onde, pela primeira vez, a informação vinda dos olhos esquerdo e direito começa a se misturar. Enquanto todos os neurônios da camada IVC recebem apenas sinais de entrada monoculares, a maior parte dos neurônios nas camadas II e III recebem sinais de entrada binoculares, isto é, oriundos dos dois olhos (Bear, et al., 2008)

As células piramidais enviam axônios para fora do córtex estriado, para a substância branca. As células piramidais em diferentes camadas do córtex estriado inervam diferentes estruturas. Células piramidais das camadas II, III e IVB enviam axônios para outras áreas corticais. Células piramidais da camada V enviam axônios descendentes para o colículo superior e para a ponte. Células piramidais da camada VI enviam uma projeção maciça de axônios de volta para o NGL. Axônios de células piramidais em todas as camadas também se ramificam e formam conexões locais no córtex (Bear, et al., 2008).

⁴⁵ O termo estriado refere-se ao fato de existirem faixas densas de axônios aferentes mielinizados que percorrem paralelamente à superfície da área V1, formando estrias visíveis na cor branca (Bear, et al., 2008)

Apêndice B: Conceitos de Cálculo

B.1 Seqüências numéricas

Definição: Seja $N=\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ o conjunto dos inteiros positivos, uma seqüência de números reais é uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada inteiro $n \in \mathbb{N}$, um único número real $f(n) = a \cdot n$. O conjunto imagem de f pode ser assim representado por

$$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots \quad \text{ou} \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots, \quad (\text{B.1})$$

em que a_n indica o n -ésimo termo da seqüência $\{a_n\}, n \in \mathbb{N}$, denominado termo geral da seqüência. O limite de uma seqüência, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, significa que dado $\xi > 0$, $\exists N > 0 | n \in \mathbb{N} \rightarrow |a_n - L| < \xi$, neste caso diz-se que a_n converge para L ($a_n \rightarrow L$). Caso contrário a_n diverge. Ou seja, se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$, $b \in \mathbb{R}$, então a série converge, e se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ a série diverge.

B.2 Séries numéricas

Definição: Dada uma seqüência $\{a_n\}, n \in \mathbb{N}$, chama-se série à soma infinita,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (\text{B.2})$$

A k -ésima soma parcial da série $\sum a_n$ é $\Delta_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$. Chama-se seqüência de somas parciais da série $\sum a_n$ à seqüência $\{\Delta_k\}, n \in \mathbb{N}$. Diz-se que $\sum a_n$ é convergente se a seqüência $\{\Delta_k\}, n \in \mathbb{N}$ converge para o número real $\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n$, denominado soma da série $\sum a_n$. Uma série divergente não possui soma. Para se verificar a convergência de uma série existem testes chamados testes de convergência e testes de convergência absoluta. Alguns testes de convergência são o teste do termo geral e o teste da integral. O teste do termo geral diz que se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, então $\sum a_n$ é divergente. O teste da integral diz que a série $\sum a_n$ é convergente se e somente se a integral imprópria $\int_{n=1}^{\infty} f(x)dx$ é convergente.

Alguns testes de convergência absoluta são o teste da razão e teste da raiz. Uma série $\sum a_n$ é absolutamente convergente se a série $\sum |a_n|$ for convergente. O teste da razão é definido de forma que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$.

- i. Se $L < 1$, então $\sum a_n$ é absolutamente convergente;
- ii. Se $L > 1$ ou $L = \infty$, então $\sum a_n$ é absolutamente divergente;
- iii. Se $L = 1$ nada se pode concluir.

O teste da raiz é definido de forma que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

- i. Se $L < 1$ ou $L = \infty$, então $\sum a_n$ é absolutamente convergente;
- ii. Se $L > 1$, então $\sum a_n$ é absolutamente divergente;
- iii. Se $L = 1$ nada se pode concluir.

B.3 Séries de potências

Definição: Seja dada uma seqüência $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números reais. Chama-se série de potências de $x \in \mathbb{R}$, com coeficientes $C_n(s)$ à série,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot X^n = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + \dots \quad (\text{B.3})$$

Utilizando a convenção de que $x^0 = 1$, inclusive quando $x = 0$. Dado um valor real x , a série de potências pode convergir ou não, se convergir, a soma da série é uma função dada por,

$$f(x) = C_0 + C_1 \cdot x + C_1 \cdot x^2 + \dots + C_n \cdot x^n + \dots \quad (\text{B.4})$$

Em que o domínio da função é o conjunto de todos os valores de x para os quais a série converge. Em geral uma série de potências tem a forma,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (x - a)^n = C_0 + C_1 \cdot (x - a) + C_2 \cdot (x - a)^2 + C_3 \cdot (x - a)^3 + \dots \quad (\text{B.5})$$

Essa é uma série centrada no valor $x = a$. Para uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (x - a)^n$ somente uma das três afirmações abaixo é verdadeira:

- i. A série converge somente em $x = a$.

- ii. A série converge para todo $x \in \mathbb{R}$.
- iii. Existe $R > 0$ tal que a série converge para $|x - a| < R$ e diverge para $|x - a| > R$.

No caso *iii* supracitado, R é denominado raio de convergência da série. Convenciona-se que $R = 0$ no caso *i* e $R = \infty$ no caso *ii*. Chama-se intervalo de convergência da série de potências ao conjunto de números reais para os quais a série converge. Em *i* o intervalo de convergência é $\{a\} = [a, a]$, em *ii* o intervalo de convergência é $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. Em *iii* existem 4 possíveis intervalos (Figura B.1), que são

$$]a - R, a + R[, \quad [a - R, a + R[, \quad]a - R, a + R] \quad e \quad [a - R, a + R]. \quad (\text{B.6})$$

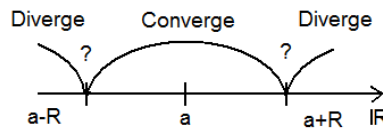


Figura B.1 – Intervalos de convergência da série de potência.

Através dos testes de convergência já citados, pode-se verificar o comportamento da série nos intervalos de convergência.

B.4 Representação de funções em séries de potências

Se uma função tem representação em série de potências e $R > 0$, então a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (x - a)^n, \quad |x - a| < R, \quad (\text{B.7})$$

- i. É derivável e $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot C_n \cdot (x - a)^{n-1}$;
- ii. É integrável e $\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int C_n \cdot (x - a)^n dx$.

Em geral, se f tem derivadas de qualquer ordem em $x = a$, pode-se mostrar que os coeficientes C_n são da forma: $C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, que é denominada série de Taylor. Em particular, para $a = 0$ tem-se a série de McLaurin de f .

A partir das séries de Mclaurin pode-se mostrar que as funções exponencial, seno e cosseno podem ser expandidas em séries de potências e desse fato advém o teorema de Euler, que será enunciado posteriormente. A expansão da função exponencial e da função cosseno pela séries de Mclaurin é dada por,

$$f(x) = \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (x)^n, \text{ e } C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \quad (\text{B.8})$$

De forma que,

$$\begin{aligned} f(x) = e^x &= C_0 \cdot (x)^0 + C_1 \cdot (x)^1 + C_2 \cdot (x)^2 + \dots + C_n \cdot (x)^n + \dots \rightarrow \\ e^x &= \frac{f^0(0)}{0!} \cdot (x)^0 + \frac{f^1(0)}{1!} \cdot (x)^1 + \frac{f^2(0)}{2!} \cdot (x)^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!} \cdot (x)^n + \dots \rightarrow \\ e^x &= \frac{e^0}{0!} \cdot (x)^0 + \frac{e^0}{1!} \cdot (x)^1 + \frac{e^0}{2!} \cdot (x)^2 + \frac{e^0}{3!} \cdot (x)^3 + \dots \rightarrow \\ e^x &= 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \dots = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Para a função cosseno, temos que,

$$\begin{aligned} f(x) = \cos(x) &= C_0 \cdot (x)^0 + C_1 \cdot (x)^1 + C_2 \cdot (x)^2 + \dots + C_n \cdot (x)^n + \dots \rightarrow \\ \cos(x) &= \frac{f^0(0)}{0!} \cdot (x)^0 + \frac{f^1(0)}{1!} \cdot (x)^1 + \frac{f^2(0)}{2!} \cdot (x)^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!} \cdot (x)^n + \dots \rightarrow \\ \cos(x) &= \frac{\cos(0)}{0!} \cdot (x)^0 + \frac{-\text{sen}(0)}{1!} \cdot (x)^1 + \frac{-\cos(0)}{2!} \cdot (x)^2 + \frac{\text{sen}(0)}{3!} \cdot (x)^3 + \dots \rightarrow \\ \cos(x) &= 1 + 0 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \dots = 1 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 - \frac{1}{6!} \cdot x^6 + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

De forma análoga,

$$\text{sen}(x) = x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \dots \quad (\text{B.11})$$

Aplicando as equações (B.10) e (B.11) à equação $\cos(x) + j \cdot \sin(x)$ em que j representa a raiz do número -1, ($j \in \mathbb{C}$), temos que,

$$\begin{aligned}\cos(x) + j \cdot \sin(x) &= 1 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 - \frac{1}{6!} \cdot x^6 + \dots + j \cdot \left(x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \dots \right) \rightarrow \\ \cos(x) + j \cdot \sin(x) &= 1 + j \cdot x - \frac{1}{2!} \cdot x^2 - \frac{1}{3!} \cdot j \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 \dots\end{aligned}\quad (\text{B.12})$$

Da mesma forma para $f(x) = e^{j \cdot x}$, temos que,

$$\begin{aligned}e^{j \cdot x} &= 1 + j \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot (j \cdot x)^2 + \frac{1}{3!} \cdot (j \cdot x)^3 + \frac{1}{4!} \cdot (j \cdot x)^4 + \dots \rightarrow \\ e^{j \cdot x} &= 1 + j \cdot x - \frac{1}{2!} \cdot x^2 - \frac{1}{3!} \cdot j \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 \dots\end{aligned}\quad (\text{B.13})$$

Portanto, comparando as equações (B.12) e (B.13), verifica-se que,

$$\cos(x) + j \cdot \sin(x) = e^{j \cdot x} \quad \text{e} \quad \cos(x) - j \cdot \sin(x) = e^{-j \cdot x} \quad (\text{B.14})$$

Conhecido como Teorema de Euler. Manipulando as equações acima chegamos às seguintes relações, que são utilizadas na demonstração da série exponencial de Fourier,

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}) \quad \text{e} \quad \sin(x) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot (e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}) \quad (\text{B.15})$$

B.5 Série trigonométrica de Fourier

Toda função periódica satisfaz a equação $f(t) = f(t \pm n \cdot T)$, $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. T é uma constante denominada período. Jean Baptiste Joseph Fourier descobriu em 1807 que uma função periódica pode ser representada por uma soma infinita de senóides e cossenóides. As senóides e cossenóides apresentam periodicidade 2π , visto que $\sin(t + 2\pi) = \sin(t)$ e $\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$. Portanto, é necessário tornar a periodicidade das funções trigonométricas uma função de T , re-escalando t ($0 \leq t \leq T$) e utilizando a frequência angular $\omega = 2\pi/T$. Admitindo todos os múltiplos inteiros n do período T , obtêm-se $\sin(n \cdot \omega \cdot t)$ e $\cos(n \cdot \omega \cdot t)$, sendo a equação de Fourier dada por,

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot w_0 \cdot t) + b_n \cdot \text{sen}(n \cdot w_0 \cdot t) \quad . \quad (\text{B.16})$$

O período de todas as funções trigonométricas da série infinita é um múltiplo inteiro, ou harmônico, do período T da função periódica, que é chamado de período fundamental. Os parâmetros a_v , a_n e b_n são os coeficientes de Fourier. A frequência w_0 é chamada frequência fundamental e seus múltiplos inteiros são denominados harmônicos de $f(t)$ (Nilsson & Riedel, 2003). A função periódica $f(t)$ deve satisfazer as condições de Dirichlet para que seja expressa sob a forma de série de Fourier, que são as seguintes:

- i. $f(t)$ deve ser unívoca;
- ii. $f(t)$ deve ter um número finito de descontinuidades dentro de cada período;
- iii. $f(t)$ deve ter um numero finito de máximos mínimos dentro de cada período;
- iv. A integral $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| dt$ deve existir.

Os coeficientes de Fourier podem ser calculados através das seguintes equações,

$$\begin{aligned} a_v &= \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \cos(k \cdot w_0 \cdot t) \cdot dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \text{sen}(k \cdot w_0 \cdot t) \cdot dt \end{aligned} \quad , \quad (\text{B.17})$$

em que a_v , é o valor médio de $f(t)$, ou seja, a componente contínua (Nilsson & Riedel, 2003). Pode-se demonstrar essas equações usando as seguintes propriedades das funções trigonométricas, que são válidas para m e n inteiros:

- i. $\int_{t_0}^{t_0+T} \text{sen}(m \cdot w_0 \cdot t) \cdot dt = 0, \quad \forall m$;
- ii. $\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(m \cdot w_0 \cdot t) \cdot dt = 0, \quad \forall m$
- iii. $\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(m \cdot w_0 \cdot t) \cdot \text{sen}(n \cdot w_0 \cdot t) \cdot dt = 0, \quad \forall m, n$

$$\text{iv.} \quad \begin{cases} \int_{t_0}^{t_0+T} \text{sen}(m \cdot w_0 \cdot t) \cdot \text{sen}(n \cdot w_0 \cdot t) \cdot dt = 0, & \forall m \neq n \\ \int_{t_0}^{t_0+T} \text{sen}(m \cdot w_0 \cdot t) \cdot \text{sen}(n \cdot w_0 \cdot t) \cdot dt = \frac{T}{2}, & \forall m = n \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

$$\text{v.} \quad \begin{cases} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(m \cdot w_0 \cdot t) \cdot \cos(n \cdot w_0 \cdot t) \cdot dt = 0, & \forall m \neq n \\ \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(m \cdot w_0 \cdot t) \cdot \cos(n \cdot w_0 \cdot t) \cdot dt = \frac{T}{2}, & \forall m = n \end{cases}$$

Para demonstrar a_v integra-se $f(t)$ para um período completo, utilizando as propriedades *ii* e *iii*, assim,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot dt &= \int_{t_0}^{t_0+T} \left(a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot w_0 \cdot t) + b_n \cdot \text{sen}(n \cdot w_0 \cdot t) \right) \cdot dt \rightarrow \\ \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot dt &= \int_{t_0}^{t_0+T} a_v \cdot dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t_0+T} (a_n \cdot \cos(n \cdot w_0 \cdot t) + b_n \cdot \text{sen}(n \cdot w_0 \cdot t)) \cdot dt \rightarrow \\ \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot dt &= a_v \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} 1 \cdot dt + 0 = a_v \cdot (t) \Big|_{t_0}^{t_0+T} = a_v \cdot [(t_0 + T) - t_0] = a_v \cdot T \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Alternativamente, pode-se expressar as séries de Fourier somente em função do cosseno, assumido que,

$$a_n \cdot \cos(n \cdot w_0 \cdot t) + b_n \cdot \text{sen}(n \cdot w_0 \cdot t) = E_n \cdot \cos(n \cdot w_0 \cdot t + \phi_n) \quad (\text{B.20})$$

O que é verdadeiro, pois,

$$\begin{aligned} a_n \cdot \cos(n \cdot w_0 \cdot t) + b_n \cdot \text{sen}(n \cdot w_0 \cdot t) &= E_n \cdot \cos(\phi_n) \cdot \cos(n \cdot w_0 \cdot t) - E_n \cdot \text{sen}(\phi_n) \cdot \text{sen}(n \cdot w_0 \cdot t) \rightarrow \\ &\begin{cases} a_n = E_n \cdot \cos(\phi_n) \rightarrow a_n^2 = E_n^2 \cdot \cos^2(\phi_n) \\ b_n = -E_n \cdot \text{sen}(\phi_n) \rightarrow b_n^2 = E_n^2 \cdot \text{sen}^2(\phi_n) \end{cases} \\ a_n^2 + b_n^2 &= E_n^2 \cdot (\cos^2(\phi_n) + \text{sen}^2(\phi_n)) = E_n^2 \rightarrow \\ E_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad e \quad \phi_n = -\tan^{-1} \cdot \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Substituindo a equação (B.20) em (B.16), temos

$$f(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t + \phi_n), \quad E_0 = a_v \quad (B.22)$$

Então, um sinal $f(t)$ da variável tempo, periódico com período T segundos, pode ser expresso como a soma de infinitos termos cossenoidais. Esses termos cossenoidais são chamados de harmônicos do sinal $f(t)$ e só possuem frequências múltiplas da frequência fundamental. Cada harmônica, de frequência ω_0 , tem uma determinada amplitude E_n , e uma determinada fase ϕ_n (equação B.21). O termo E_0 é a componente do sinal na frequência $\omega = 0$. Uma descrição completa do sinal periódico $f(t)$ inclui a representação da amplitude de suas componentes em função da frequência, o chamado espectro de amplitude, e a representação da fase de suas componentes em função da frequência, o espectro de fase do sinal. O conjunto espectro de amplitude e espectro de fase é denominado espectro de frequência do sinal $f(t)$ (Figura B.2). Como o espectro só é definido para valores de frequência múltiplos inteiros de ω_0 , então o espectro é discreto (Nilsson & Riedel, 2003).

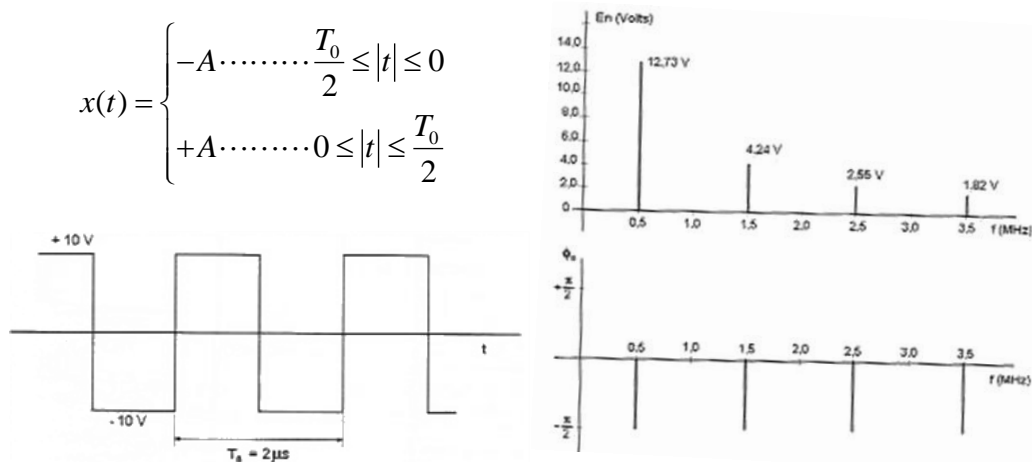


Figura B.2 – Esquerda: Onda quadrada bipolar no domínio do tempo. Direita: Espectro de frequência da onda quadrada bipolar (Carvalho, 2003).

A série de Fourier é uma ferramenta matemática que permite descrever um sinal periódico $f(t)$ conhecido no Domínio do Tempo para o Domínio da Frequência. As componentes do sinal do domínio da frequência são suas componentes espectrais. Sua representação gráfica é feita por meio de linhas de altura proporcional à amplitude (espectro de amplitude) ou à fase (espectro de fase) e são chamadas raias espectrais do sinal (Carvalho, 2003).

B.6 Série exponencial de Fourier

A forma mais concisa de expressar a série de Fourier é a forma exponencial. Utilizando o teorema de Euler, substituindo a equação (B.15) em (B.16) podemos escrever,

$$\begin{aligned} f(t) &= a_v + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \cdot (e^{j \cdot n \cdot w_0 \cdot t} + e^{-j \cdot n \cdot w_0 \cdot t}) + \frac{b_n}{2 \cdot j} \cdot (e^{j \cdot n \cdot w_0 \cdot t} - e^{-j \cdot n \cdot w_0 \cdot t}) \rightarrow \\ f(t) &= a_v + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - j \cdot b_n}{2} \right) \cdot e^{j \cdot n \cdot w_0 \cdot t} + \left(\frac{a_n + j \cdot b_n}{2} \right) \cdot e^{-j \cdot n \cdot w_0 \cdot t} . \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Definimos C_n como

$$C_n = \frac{1}{2} \cdot (a_n - j \cdot b_n), \quad n \in \mathbb{N} . \quad (\text{B.24})$$

De acordo com a definição de C_n , obtém-se,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \cos(n \cdot w_0 \cdot t) \cdot dt - j \cdot \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \text{sen}(n \cdot w_0 \cdot t) \cdot dt \right] \rightarrow \\ C_n &= \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot (\cos(n \cdot w_0 \cdot t) - j \cdot \text{sen}(n \cdot w_0 \cdot t)) \cdot dt \rightarrow \\ C_n &= \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \left(\frac{e^{j \cdot n \cdot w_0 \cdot t} + e^{-j \cdot n \cdot w_0 \cdot t}}{2} - \frac{e^{j \cdot n \cdot w_0 \cdot t} - e^{-j \cdot n \cdot w_0 \cdot t}}{2 \cdot j} \right) \cdot dt \rightarrow \\ C_n &= \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot w_0 \cdot t} \cdot dt . \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Verifica-se que,

$$C_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot dt = a_v . \quad (\text{B.26})$$

Em seguida, observa-se que,

$$C_{-n} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot e^{j \cdot n \cdot w_0 \cdot t} \cdot dt = C_n^* = \frac{1}{2} \cdot (a_n + j \cdot b_n) . \quad (\text{B.27})$$

Substituindo as equações (B.24), (B.26) e (B.27) em (B.23), temos

$$\begin{aligned}
 f(t) &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} + C_n^* \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \right) \rightarrow \\
 f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} .
 \end{aligned} \tag{B.28}$$

O segundo somatório do lado direito da equação (B.28) é equivalente ao somatório de $C_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}$ de -1 a $-\infty$ ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} = \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} . \tag{B.29}$$

Como somar de -1 a $-\infty$ é o mesmo que somar de $-\infty$ a -1, a equação (B.29) pode ser escrita na forma,

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \rightarrow \\
 f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} .
 \end{aligned} \tag{B.30}$$

A equação (B.30) é a forma exponencial da série de Fourier. Os coeficientes C_n da série exponencial de Fourier são números complexos, com módulo e fase dados por,

$$|C_n| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad e \quad \phi_n = -\tan^{-1} \cdot \left(\frac{b_n}{a_n} \right) . \tag{B.31}$$

Na série exponencial temos, na frequência zero, a componente contínua $C_0 = E_0 = a_v$ e exponenciais complexas (fasores) de frequências múltiplas inteiras positivas e negativas da frequência fundamental ω_0 . A frequência negativa não tem sentido físico, mas cada componente senoidal real é resultante da soma dos dois fasores. Dessa forma, o espectro de frequências é bilateral, com frequências positivas e negativas. Cada

componente espectral real é representado por duas raiais, uma na frequência w_0 e outra na frequência $-w_0$.

A amplitude de cada uma dessas raiais é metade da amplitude da raia correspondente ao espectro unilateral da série trigonométrica de Fourier. A fase é a mesma que a da série trigonométrica para a componente de frequência positiva, enquanto que, para a componente de frequência negativa, a fase tem o mesmo valor absoluto e sinal oposto à da componente da série trigonométrica (Carvalho, 2003). A figura B.3 mostra a decomposição de um sinal periódico simples, um pulso retangular periódico (equação (B.32)), pela série exponencial de Fourier.

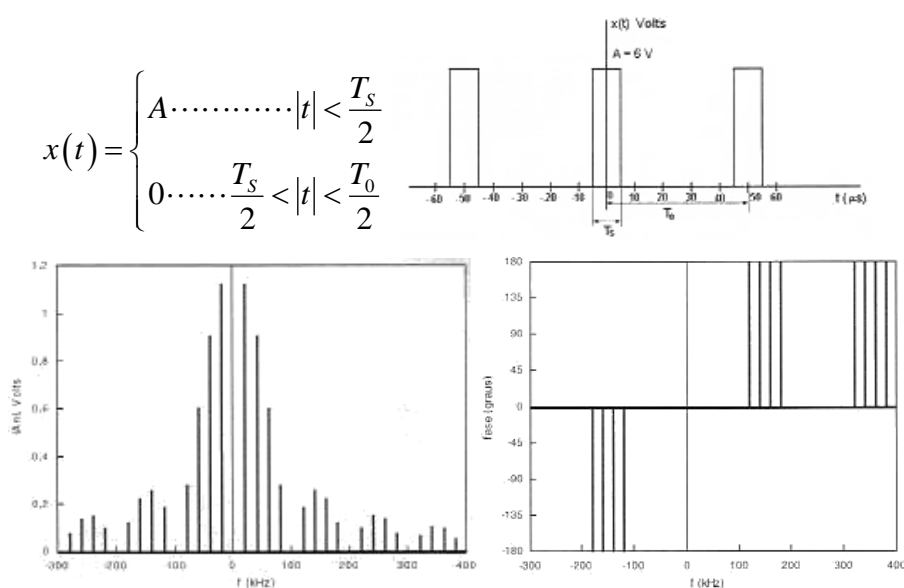


Figura B.3 – Superior: Trem de pulsos retangulares periódicos no domínio do tempo. Inferior: Espectro de frequência e fase do trem de pulsos retangulares (Carvalho, 2003).

B.7 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é um caso especial da transformada de Laplace bilateral no qual a parte real da frequência complexa é nula. Entretanto, em termos de interpretação física, a transformada de Fourier pode ser compreendida como um caso limite da série de Fourier (Carvalho, 2003). Interessa-nos determinar a descrição no domínio da frequência de um sinal $f(t)$ não-periódico. Para isso tomamos o sinal $f(t)$ como o limite de um sinal periódico $f_T(t)$ com período de repetição tendendo ao infinito (Nilsson & Riedel, 2003), dado por,

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) \quad . \quad (\text{B.32})$$

O espectro de $f_T(t)$ consiste de raias uniformemente espaçadas de w_0 com amplitudes e fases dadas pelos coeficientes C_n (equação B.25). À medida que T aumenta, a distância entre as frequências harmônicas se torna cada vez menor, e a amplitude $|C_n|$ também diminui. Assim, quando $T \rightarrow \infty$, o espectro do sinal periódico que era discreto, tende a um espectro contínuo, porém não faz mais sentido considerar componentes espectrais isoladas (Nilsson & Riedel, 2003). Consideremos então a relação,

$$\frac{C_n}{w_0} = \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot w_0 \cdot t} \cdot dt \quad . \quad (\text{B.33})$$

É conveniente fazer algumas mudanças de notação:

- i. Substitui-se o espaçamento w_0 pela variação de frequência Δw ;
- ii. Substitui-se uma frequência específica $n \cdot w_0$ pela variável frequência contínua w ;
- iii. Substitui-se C_n por uma função da frequência contínua, $C(w)$.

Com essa nova notação teremos,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(w) \cdot e^{j \cdot w \cdot t}$$

$$\frac{C(w)}{\Delta w} = \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot e^{-j \cdot w \cdot t} \cdot dt \quad . \quad (\text{B.34})$$

Definimos a transformada de Fourier de $f(t)$ a função da frequência dada pelo limite,

$$F(w) = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{C(w)}{\Delta w} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j \cdot w \cdot t} \cdot dt \quad . \quad (\text{B.35})$$

E teremos,

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(w) \cdot \Delta w \cdot e^{-j \cdot w \cdot t} = \int_{-\infty}^{\infty} F(w) \cdot e^{j \cdot w \cdot t} \cdot dw \quad . \quad (\text{B.36})$$

Portanto, conhecida a descrição do sinal no domínio do tempo, $f(t)$, podemos determinar sua descrição no domínio da frequência através da equação (B.34) que é chamada transformada de Fourier de $f(t)$, sendo representada da seguinte forma,

$$F(w) = \mathfrak{T}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j \cdot w \cdot t} \cdot dt \quad . \quad (\text{B.37})$$

Do mesmo modo, conhecida a descrição do sinal no domínio da frequência, $F(w)$, podemos determinar sua descrição no domínio do tempo através da equação (B.36) que é chamada transformada inversa de Fourier de $F(w)$, sendo representada da seguinte forma,

$$f(t) = \mathfrak{T}^{-1}\{F(w)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(w) \cdot e^{j \cdot w \cdot t} \cdot dw \quad . \quad (\text{B.38})$$

Dessa forma, os sinais não periódicos podem ser descritos no domínio da frequência. A figura B.4 mostra a aplicação da transformada de Fourier em um sinal não periódico simples, um pulso retangular isolado.

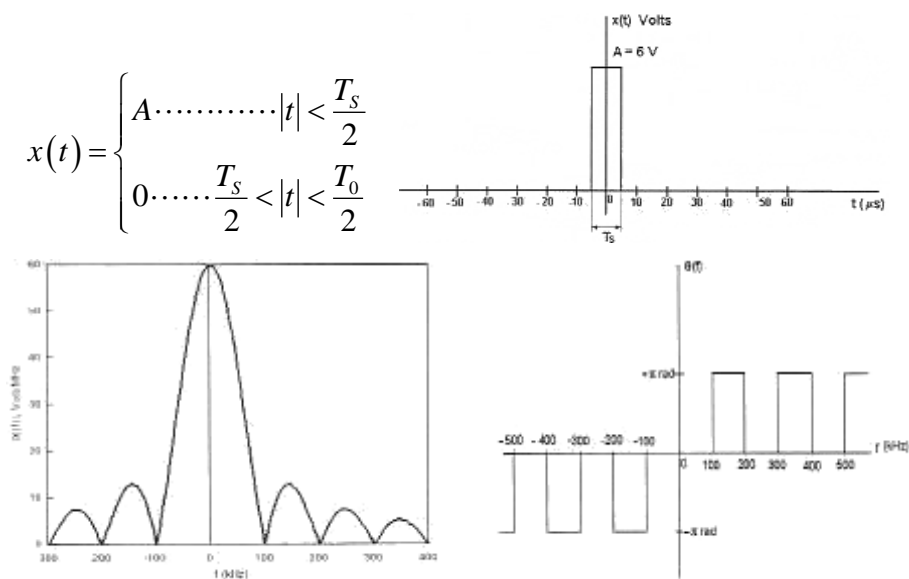


Figura B.4 – Superior: Pulso retangular não-periódico no domínio do tempo. Inferior: Espectro de frequência do pulso retangular (Carvalho, 2003).

Apêndice C: Conceitos de Estatística

O termo “estatística” se refere aos métodos utilizados na interpretação e coleta de dados. A natureza dos dados pode ser qualitativa (categórica) ou quantitativa (numérica). Os dados numéricos podem ser discretos ou contínuos. Os dados discretos são números que só assumem valores dentro de um conjunto limitado de possibilidades: $X \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, sendo obtidos normalmente por métodos de contagem. Os dados numéricos contínuos podem assumir quaisquer valores e são normalmente obtidos através de medições em uma escala contínua.

C.1 Regularidade estatística, frequência relativa e probabilidade

Muitos modelos de probabilísticos utilizados na engenharia são baseados no fato de que médias obtidas em longas seqüências de repetições de experimentos aleatórios produzem aproximadamente o mesmo valor. Essa propriedade é chamada regularidade estatística.

A frequência relativa é o número de ocorrências, n_k , de um evento k em n repetições idênticas do mesmo experimento. Sendo definida por,

$$f_k(n) = \frac{n_k(n)}{n} . \quad (C.1)$$

Algumas propriedades da frequência relativa são:

- i. $0 \leq f_k(n) \leq 1$;
- ii. $\sum_{k=1}^K f_k(n) = 1$, em que K é o número total de eventos;
- iii. $f_C(n) = f_A(n) + f_B(n)$, em que A e B são eventos que não podem ocorrer simultaneamente.

Pela regularidade estatística $f_k(n)$ varia cada vez menos em torno de um valor constante, quando n é feito cada vez maior, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_k(n) = p_k . \quad (C.2)$$

A constante p_k é chamada probabilidade do evento k . Existem alguns problemas em usar essa definição de probabilidade para desenvolver uma teoria matemática da probabilidade. Primeiramente, não é claro em que sentido matemático o limite da equação (C.1) existe. Segundo, nunca poderemos realizar um experimento infinitas vezes, então nunca saberemos a probabilidade p_k exatamente. Os axiomas da probabilidade satisfazem as propriedades da frequência relativa:

- i. $0 \leq P[A] \leq 1$;
- ii. $P[S] = 1$, em que S é o conjunto com todos os eventos possíveis;
- iii. se $A \cap B = \emptyset$, então, $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$.

C.2 Histograma

O método mais comum para representação dos dados numéricos e suas respectivas probabilidades é o gráfico de barras, ou histograma, em que a altura de barras é proporcional à frequência relativa, ou probabilidade do evento. A figura C.1 mostra Histograma relacionando os eventos da Tabela 6.1.

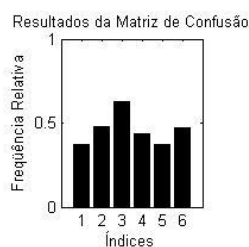


Figura C.1 – Histograma relacionando os eventos da Tabela 6.1.

O índice (1) do eixo horizontal representa a frequência relativa de acertos de classificação da mão direita (MD) dentre a classe mão direita do banco de dados (BD): MD-BD. O índice (2) do eixo horizontal representa a frequência relativa de acertos de classificação da mão direita (MD) dentre todas as vezes que o classificador predisse a classe da mão direita (CD): MD-CD. (3)→ME-BE; (4)→ME-CE; (5)→GP-BP; (6)→GP-CP. O índice (3) do eixo horizontal representa a frequência relativa de acertos de classificação da mão esquerda (ME) dentre a classe mão direita do banco de dados (BE): ME-BE. O índice (4) do eixo horizontal representa a frequência relativa de acertos de classificação da mão esquerda (ME) dentre todas as vezes que o classificador predisse a classe da mão esquerda (CE): ME-CE. O índice (5) do eixo horizontal representa a frequência relativa de acertos de classificação da geração de palavras (GP)

dentre a classe geração de palavras do banco de dados (BP): GP-BP. O índice (6) do eixo horizontal representa a frequência relativa de acertos de classificação da geração de palavras (GP) dentre todas as vezes que o classificador predisse a classe geração de palavras (CP): GP-CP.

C.3 Probabilidade conjunta

Dados dois eventos aleatórios A e B , seja $n_{A \cap B}$ o número de ocorrências simultâneas desses eventos, num total de n experimentos. Chama-se probabilidade conjunta dos eventos A e B a probabilidade de ocorrência simultânea dos eventos A e B , dada pela relação,

$$P[A \cap B] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_{A \cap B}}{n} . \quad (C.3)$$

No total de n experimentos, o número de ocorrências de A é n_A e o número de ocorrências de B é n_B . Evidentemente, $n_{A \cap B} \leq n_A$ e $n_{A \cap B} \leq n_B$. Conseqüentemente a probabilidade conjunta dos eventos A e B é inferior ou, no máximo, igual à probabilidade de ocorrência de cada evento individual.

C.4 Probabilidade condicional

Quando dois eventos, A e B , estão relacionados, de forma que o conhecimento de um, digamos B , altera a probabilidade de ocorrência do outro, podemos calcular a probabilidade condicional, $P[A|B]$, de ocorrência do evento A dado que o evento B ocorreu. A probabilidade condicional é definida por,

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}, \quad \text{para } P[B] > 0 . \quad (C.4)$$

Em termos da frequência relativa,

$$P[A|B] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_{A \cap B}/n}{n_B/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_{A \cap B}}{n_B}, \quad \text{para } n_B > 0 . \quad (C.5)$$

C.5 Probabilidade total

Sejam B_1, B_2, \dots, B_n eventos mutuamente exclusivos, cuja união é o espaço amostral S (Figura C.2). Esses conjuntos são denominados partições de S . Qualquer evento A pode ser representado como a união de eventos mutuamente exclusivos, na seguinte forma,

$$\begin{aligned} A &= A \cap S = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) \Leftrightarrow \\ A &= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n) \end{aligned} \quad (C.6)$$

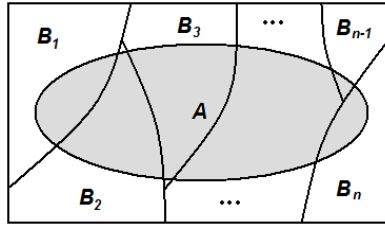


Figura C.2 – Partição de S em n conjuntos disjuntos.

Temos que a probabilidade de ocorrência do evento A é

$$P[A] = P[A \cap B_1] + P[A \cap B_2] + \dots + P[A \cap B_n]. \quad (C.7)$$

Aplicando a equação (C.4) em cada termo à direita da equação (C.7), obtemos o teorema da probabilidade total,

$$P[A] = P[A | B_1] \cdot P[B_1] + P[A | B_2] \cdot P[B_2] + \dots + P[A | B_n] \cdot P[B_n]. \quad (C.8)$$

C.6 Regra de Bayes

Sejam B_1, B_2, \dots, B_n partições do espaço amostral S . Suponha que o evento A ocorreu; qual é a probabilidade do evento B_i ? Pela definição de probabilidade condicional, temos

$$P[B_i | A] = \frac{P[A \cap B_i]}{P[A]} = \frac{P[A | B_i] \cdot P[B_i]}{\sum_{k=1}^n P[A | B_k] \cdot P[B_k]} . \quad (C.9)$$

Em que usamos o teorema da probabilidade total para substituir o termo $P[A]$. A equação (C.9) é chamada Regra de Bayes. A probabilidade dos eventos anteriores à realização do experimento, $P[B_i]$, é chamada “probabilidades a priori” e a probabilidade dos eventos na partição, $P[B_i | A]$, dado que o evento A ocorreu é chamada “probabilidade a posteriori”.

C.7 Eventos independentes

Se a ocorrência do evento B não afeta a probabilidade de algum outro evento A , então o evento A é independente de B . Mas, a equação (C.4) não é definida para $P[B] = 0$, então defini-se que os dois eventos A e B são independentes se,

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B] . \quad (C.10)$$

Então a equação (C.4) implica que,

$$P[A | B] = P[A] \quad e \quad P[B | A] = P[B] . \quad (C.11)$$

C.8 Variável aleatória contínua

Uma variável aleatória contínua X é uma função que atribui um número real, $X(\xi)$, para cada resultado ξ no espaço amostral de um experimento aleatório. O espaço amostral S é o domínio da variável aleatória, e o conjunto S_X de todos os valores assumidos por X é a imagem. Então S_X é um subconjunto do conjunto de todos os números reais.

C.9 Distribuição cumulativa

Denomina-se função distribuição cumulativa, cdf (do inglês, *cumulative distribution function*), a probabilidade da variável aleatória contínua X assumir valores inferiores a um dado valor x , sendo dada por,

$$F_X(x) = P[X \leq x] \quad \text{para } -\infty < x < +\infty. \quad (\text{C.12})$$

Os axiomas da probabilidade e seus corolários implicam que a cdf possui as seguintes propriedades:

- i. $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$;
- ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$;
- iii. $0 \leq F_X(x) \leq 1$, consequência das propriedades i e ii;
- iv. $F_X(x)$ é uma função monotonicamente não decrescente de x , isto é, se $a < b$, então $F_X(a) \leq F_X(b)$;
- v. $F_X(x)$ é contínua pela direita, isto é, para $h > 0$, $F_X(b) = \lim_{h \rightarrow 0} F_X(b + h) = F_X(b^+)$.

A probabilidade dos eventos que correspondem a intervalos da forma $\{a < X \leq b\}$ pode ser expressa em termos de cdf por,

$$P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a). \quad (\text{C.13})$$

C.10 Função densidade de probabilidade

A função densidade de probabilidade, pdf (do inglês, *probability density function*) é definida pela derivada da cdf,

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_X(x+h) - F_X(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[x < X \leq x+h]}{h}. \quad (\text{C.14})$$

A pdf é uma forma alternativa e mais utilizada para especificar a informação contida na cdf. A pdf representa a densidade da probabilidade no ponto x , no sentido de

que a probabilidade de que X está em um pequeno intervalo na vizinhança de x é aproximadamente $f_X(x) \cdot h$. A pdf possui as seguintes propriedades:

- i. $f_X(x) \geq 0$;
- ii. $P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(x) dx$;
- iii. $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$;
- iv. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$;

C.11 Valor esperado

O valor esperado, $E[\cdot]$, também chamado esperança matemática de uma variável aleatória é a soma das probabilidades de cada possibilidade do experimento multiplicada pelo seu valor. Isto é, representa o valor médio "esperado" de uma experiência se ela for repetida muitas vezes. Se todos os eventos tiverem igual probabilidade o valor esperado é a média aritmética. Para uma variável aleatória contínua X o valor esperado é dado por,

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx . \quad (\text{C.15})$$

A equação (C.15) resulta nas propriedades abaixo. Seja c uma constante qualquer e Y variável aleatória contínua:

- i. $E[c] = \int_{-\infty}^{+\infty} c \cdot f_C(c) dc = c \cdot 1 = c$;
- ii. $E[c \cdot X] = \int_{-\infty}^{+\infty} c \cdot x \cdot f_X(x) dx = c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = c \cdot E[X]$.
- iii. $E[X + Y] = \iint_{-\infty}^{+\infty} (x \cdot f_X(x)) dx + (y \cdot f_Y(y)) dy = E[X] + E[Y]$.

C.12 Funções geradoras

Funções geradoras são utilizadas como um modo alternativo para definir a distribuição de probabilidade. Nesse âmbito estão compreendidas a função geradora de momentos e a função característica. A função geradora de momentos de uma variável aleatória nem sempre existe sendo definida por,

$$M_X(t) = E[e^{t \cdot x}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t \cdot x} \cdot f_X(x) dx , \quad t \in \mathbb{R} . \quad (\text{C.16})$$

Utilizando a expansão da função exponencial pelas séries de Mclaurin (Apêndice B – eq. B.9) e substituindo em C.16, obtêm-se,

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= E[e^{t \cdot X}] = E\left[1 + t \cdot X + \frac{(t \cdot X)^2}{2!} + \frac{(t \cdot X)^3}{3!} + \dots\right] = \\
 M_X(t) &= E[1] + t \cdot E[X] + \frac{t^2}{2!} E[X^2] + \frac{t^3}{3!} E[X^3] + \dots = \\
 M_X(t) &= 1 + \mu'_1 \cdot t + \mu'_2 \cdot \frac{t^2}{2!} + \mu'_3 \cdot \frac{t^3}{3!} + \dots
 \end{aligned} \tag{C.17}$$

em que μ'_n é o momento de ordem n , sendo representado de forma geral por, $\mu'_n = E[X^n]$. Os momentos podem ser extraídos da função geradora de momentos por sucessivas diferenciações em $M_X(t)$ igual a zero. Ou seja, os momentos μ'_n são os coeficientes da série de Mclaurin de $M_X(t)$,

$$\begin{aligned}
 M_X^I(0) &= \mu'_0 = 1 \\
 M_X^{II}(0) &= \mu'_1 = E[X] \\
 M_X^{III}(0) &= \mu'_3 \\
 M_X^{IV}(0) &= \mu'_4
 \end{aligned} \tag{C.18}$$

Verifica-se que o momento de ordem zero, μ'_0 , é constante e unitário e o momento de primeira ordem, μ'_1 , corresponde ao valor esperado de X . Substituindo-se X por $X - \mu'_1$ em C.17 obtêm-se os momentos centrais de X , dados por,

$$\begin{aligned}
 M_{X-\mu'_1}(t) &= E[e^{t \cdot (X-\mu'_1)}] = \\
 M_{X-\mu'_1}(t) &= E[1] + t \cdot E[X - \mu'_1] + \frac{t^2}{2!} E[(X - \mu'_1)^2] + \frac{t^3}{3!} E[(X - \mu'_1)^3] + \dots = \\
 M_{X-\mu'_1}(t) &= 1 + \mu_1 \cdot t + \mu_2 \cdot \frac{t^2}{2!} + \mu_3 \cdot \frac{t^3}{3!} + \dots
 \end{aligned} \tag{C.19}$$

em que μ_n é o momento central de ordem n , sendo representado de forma geral por, $\mu_n = E[(X - \mu'_1)^n]$. De maneira semelhante, os momentos centrais são os coeficientes da série de Mclaurin de $M_{X-\mu'_1}(t)$,

$$M_{X-\mu'_1}^I(0) = \mu_0 = 1$$

$$\begin{aligned}
M_{X-\mu_1'}^{II}(0) &= \mu_1 = E[X - \mu_1'] = E[X] - E[\mu_1'] = \mu_1' - \mu_1' = 0 \\
M_{X-\mu_1'}^{III}(0) &= \mu_2 = E[(X - \mu_1')^2] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2 \\
M_{X-\mu_1'}^{IV}(0) &= \mu_3
\end{aligned} \tag{C.20}$$

Verifica-se que o momento central de ordem zero, μ_0 , é constante e unitário, o momento central de primeira ordem, μ_1 , é zero e o momento central de segunda ordem, μ_2 , é chamado de variância e informa a dispersão média da variável em torno da média.

De forma a se obter uma medida de dispersão estatística que seja um número não negativo e que possua as mesmas unidades de medida dos dados defini-se o desvio padrão como a raiz quadrada da variância, $\sigma = \sqrt{\mu_2}$. A assimetria é uma medida da inclinação da função de densidade da distribuição, sendo definida em função dos momentos centrais de segunda e terceira ordem,

$$y_1 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \tag{C.21}$$

Se a distribuição estiver mais inclinada para a direita, ou seja, seus valores estão mais concentrados à esquerda, a assimetria será positiva (Figura C.3 (a)). Se a função de densidade está mais inclinada para a esquerda, ou seja, seus valores estão mais concentrados à direita, a assimetria será negativa (Figura C.3 (c)) e qualquer distribuição simétrica em relação à média terá um terceiro momento central nulo (Figura C.3 (b)).

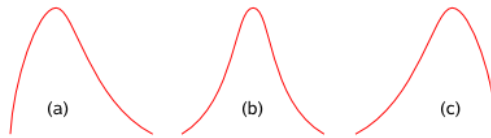


Figura C.3 – Exemplos de assimetria em funções de densidade de distribuições.

A curtose é um indicador do achatamento da curva da função de densidade em relação à distribuição normal com mesma variância, sendo definida em função dos momentos centrais de segunda e quarta ordem,

$$y_2 = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^{3/2}} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} . \quad (\text{C.22})$$

A curtose possui valores mais altos para curvas afuniladas e mais baixos para curvas achatadas. Como a distribuição normal padrão apresenta curtose igual a 3, é mais usual indicar a curtose com referência a essa distribuição, e a denominação passa a ser excesso de curtose, sendo dado por,

$$g_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 . \quad (\text{C.23})$$

Os seguintes termos são usados para indicar a faixa do excesso de curtose de uma distribuição: leptocúrtica, quando o excesso de curtose é positivo (Figura C.4 (a)); mesocúrtica, quando o excesso de curtose é nulo (Figura C.4 (b)), e platicúrtica quando o excesso de curtose é negativo (Figura C.4 (c)).

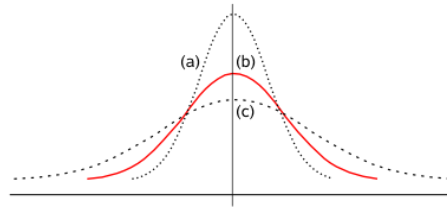


Figura C.4 – Tipos de excesso de curtose de uma distribuição.

C.13 Função característica

De forma contrária à função geradora de momentos, a função característica de uma variável aleatória com qualquer função distribuição de probabilidade, sempre existe, sendo definida por,

$$\psi_X(t) = E[e^{i \cdot t \cdot x}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \cdot t \cdot x} \cdot f_X(x) dx, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{C} . \quad (\text{C.24})$$

em que i corresponde a unidade imaginária. Então, novamente utilizando a expansão da função exponencial pelas séries de Mclaurin (Apêndice B – eq. B.9) e substituindo em C.24, obtêm-se,

$$\begin{aligned}
\Psi_X(t) &= E[e^{i \cdot t \cdot X}] = E\left[1 + i \cdot t \cdot X + \frac{(i \cdot t \cdot X)^2}{2!} + \frac{(i \cdot t \cdot X)^3}{3!} + \dots\right] = \\
\Psi_X(t) &= E[1] + i \cdot t \cdot E[X] + \frac{i^2 \cdot t^2}{2!} E[X^2] + \frac{i^3 \cdot t^3}{3!} E[X^3] + \dots = \\
\Psi_X(t) &= 1 + i \cdot \mu'_1 \cdot t + \mu'_2 \cdot \frac{i^2 \cdot t^2}{2!} + \mu'_3 \cdot \frac{i^3 \cdot t^3}{3!} + \dots \quad (C.25)
\end{aligned}$$

Caso existam momentos de todas as ordens para uma determinada variável aleatória, os momentos estarão relacionados à função característica pela seguinte relação,

$$\Psi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu'_n \cdot \frac{(i \cdot t)^n}{n!} . \quad (C.26)$$

De maneira que a função característica de X pode assumir a nova forma designada função geradora de cumulantes,

$$K_X(t) = \ln(\Psi_X(t)) . \quad (C.27)$$

Sabendo que a expansão em séries de potências da função logaritmo é dada por, $\ln(1 + Z) = \frac{Z}{1} - \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{3} - \dots = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{Z^m}{m}$, obtêm-se que expansão de $K_X(t)$ em séries de potências, que assume a seguinte forma,

$$\begin{aligned}
K_X(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu'_n \cdot \frac{(i \cdot t)^n}{n!} \right)^m = \\
K_X(t) &= \mu'_1 \cdot i \cdot t - (\mu'_2 - \mu_1'^2) \cdot \frac{t^2}{2!} - (\mu'_3 - 3 \cdot \mu'_2 \cdot \mu'_1 + 2 \cdot \mu_1'^3) \cdot i \cdot \frac{t^3}{3!} + \dots . \quad (C.28)
\end{aligned}$$

Os cumulantes podem ser extraídos da função geradora de cumulantes por sucessivas diferenciações em $K_X(t)$ igual a zero. Ou seja, os cumulantes K_n são os coeficientes da série de Mclaurin de $K_X(t)$, ignorando a componente imaginária, e são dados por,

$$\begin{aligned}
K_1 &= K_X^I(0) = \mu_1' \text{ (valor esperado)} \\
K_2 &= K_X^{II}(0) = \mu_2' - \mu_1'^2 = \mu_2 = \sigma^2 \text{ (variância)} \\
K_3 &= K_X^{III}(0) = \mu_3' - 3 \cdot \mu_2' \cdot \mu_1' + 2 \cdot \mu_1'^3 = \mu_3 \\
K_4 &= K_X^{IV}(0) = \mu_4' - 4 \cdot \mu_3' \cdot \mu_1' - 3 \cdot \mu_2'^2 + 12 \cdot \mu_2' \cdot \mu_1'^2 - 6 \cdot \mu_1'^4 = \mu_4 - 3 \cdot \mu_2^2 \quad (\text{C.29})
\end{aligned}$$

C.14 Distribuições estatísticas

As principais distribuições estatísticas são: a distribuição de Gauss (gaussiana ou normal), a distribuição de Rayleigh, a distribuição de Cauchy e a distribuição de Laplace. As características dessas distribuições estão resumidas abaixo.

A distribuição Gaussiana possui domínio $S_X = (-\infty, +\infty)$, e função densidade de probabilidade dada por,

$$f_X(x|\mu_1', \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-(x-\mu_1')^2/2 \cdot \sigma^2} . \quad (\text{C.30})$$

Da eq. C.24 e C.30, obtêm-se sua função característica, dada por,

$$\Psi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \cdot t \cdot x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-(x-\mu_1')^2/2 \cdot \sigma^2} dx = e^{i \cdot \mu_1' \cdot t - \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot t^2} . \quad (\text{C.31})$$

Da eq. C.27 e C.31, obtêm-se sua função geradora de cumulantes, dada por,

$$K_X(t) = \ln(\Psi_X(t)) = \mu_1' \cdot i \cdot t - \frac{\sigma^2}{2} \cdot t^2 . \quad (\text{C.32})$$

Os cumulantes da distribuição normal são os coeficientes da série de Mclaurin de $K_X(t)$, ignorando a componente imaginária, e são dados por,

$$\begin{aligned}
K_1 &= K_X'(0) = \mu_1' \text{ (valor esperado)} \\
K_2 &= K_X''(0) = \sigma^2 \text{ (variância)} \\
K_3 &= K_X'''(0) = 0 \\
K_4 &= K_X^{IV}(0) = 0 \\
&\vdots \\
K_n &= K_X^n(0) = 0
\end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

Em que se verifica que os únicos cumulantes não-nulos são o primeiro e segundo cumulantes, assim, a distribuição normal é completamente descrita pelo valor esperado e variância. Curiosamente para a distribuição normal o valor esperado μ'_1 coincide com a média aritmética das n amostras do experimento, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. Fato que será demonstrado abaixo. Assumindo n amostras *iid*, a probabilidade total de ocorrência dos n eventos será a multiplicação das probabilidades individuais (ver sessão C.7), e a função densidade de probabilidade total pode ser representada por,

$$f_X(x_1, \dots, x_n | \mu'_1, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i | \mu'_1, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \right)^n \cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu'_1)^2}{2 \cdot \sigma^2}}. \quad (C.34)$$

A equação C.34 pode ser re-escrita de forma conveniente para explicitar o termo \bar{x} , sendo dada por,

$$f_X(x_1, \dots, x_n | \mu'_1, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \right)^n \cdot e^{-\frac{(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2) + n \cdot (\bar{x} - \mu'_1)^2}{2 \cdot \sigma^2}}. \quad (C.35)$$

A probabilidade total $f_X(x_1, \dots, x_n | \mu'_1, \sigma^2)$ retorna um valor constante de forma que a derivada parcial de f_X em relação à qualquer termo da equação será nula. De maneira semelhante, a derivada parcial de $\ln(f_X)$ também será nula, e tomaremos a derivada parcial de $\ln(f_X)$ em relação à μ'_1 , $\frac{\partial \ln(f_X)}{\partial \mu'_1}$, que necessita de um algebrismo muito mais simples que $\frac{\partial f_X}{\partial \mu'_1}$, para esta demonstração.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(f_X)}{\partial \mu'_1} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \mu'_1} \cdot \left[\ln \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \right)^n \cdot e^{-\frac{(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2) + n \cdot (\bar{x} - \mu'_1)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \right) \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mu'_1} \cdot \left[n \cdot \ln \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \right) \right) - \frac{(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2) + n \cdot (\bar{x} - \mu'_1)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right] &= 0 \\ \frac{\partial \ln(f_X)}{\partial \mu'_1} = -\frac{2 \cdot n \cdot (\bar{x} - \mu'_1)}{2 \cdot \sigma^2} = 0 &\Rightarrow (\bar{x} - \mu'_1) = 0 \Rightarrow \mu'_1 = \bar{x}. \end{aligned} \quad (C.36)$$

De maneira similar a derivada parcial de $\ln(f_X)$ é tomada em relação à σ para que encontremos um estimador da variância amostral, $\hat{\sigma}^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln(f_X)}{\partial \sigma} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \sigma} \cdot \left[\ln \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \right)^n \cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \right) \right] = 0 \\
\frac{\partial}{\partial \sigma} \cdot \left[n \cdot \ln \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \right) \right) - \frac{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2}{2 \cdot \sigma^2} \right] &= 0 \\
\frac{\partial \ln(f_X)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2}{\sigma^3} = 0 &\Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2 = \hat{\sigma}^2 . \quad (C.37)
\end{aligned}$$

A distribuição de Rayleigh possui domínio $S_X = [0, +\infty)$, e função densidade de probabilidade dada por,

$$f_X(x) = \frac{x}{\alpha^2} \cdot e^{-x^2/2\alpha^2} \quad x \geq 0 \quad e \quad \alpha > 0 . \quad (C.38)$$

O valor esperado e variância são dados por,

$$E[X] = \alpha \cdot \sqrt{\pi/2}; \quad VAR[X] = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \alpha^2 . \quad (C.39)$$

A distribuição de Cauchy possui domínio $S_X = (-\infty, +\infty)$, e função densidade de probabilidade dada por,

$$f_X(x) = \frac{\alpha/\pi}{x^2 + \alpha^2} \quad -\infty < x < +\infty \quad e \quad \alpha > 0 . \quad (C.40)$$

O valor esperado e a variância não existem para esta distribuição.

A distribuição de Laplace possui domínio $S_X = (-\infty, +\infty)$, e função densidade de probabilidade dada por,

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\alpha|x|} \quad -\infty < x < +\infty \quad e \quad \alpha > 0 . \quad (C.41)$$

O valor esperado e variância são dados por,

$$E[X] = 0; \quad \text{VAR}[X] = \frac{2}{\alpha^2} . \quad (\text{C.42})$$

C.15 Teorema central do limite

Uma razão para que a distribuição normal seja considerada tão importante é porque qualquer que seja a distribuição da variável de interesse, para grandes amostras, a distribuição das médias amostrais serão aproximadamente normalmente distribuídas e tenderão a uma distribuição normal à medida que a distribuição normal crescer. Então podemos ter uma variável original com uma distribuição muito diferente da normal, mas se tomarmos um número grande de amostras dessa distribuição e então fizermos um histograma das médias amostrais, a forma se parecerá com a curva normal. Esse resultado é conhecido como teorema do limite central. O teorema central do limite pode ser aplicado para qualquer distribuição que possua média e variância finita.

C.16 Variáveis aleatórias múltiplas

Muitos experimentos aleatórios envolvem múltiplas variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n , e essas variáveis aleatórias formam um vetor n -dimensional de variáveis aleatórias. Um vetor de variáveis aleatórias \mathbf{X} é uma função que atribui um vetor de números reais, para cada resultado ξ no espaço amostral de um experimento aleatório.

C.17 Distribuições conjuntas

A função distribuição cumulativa conjunta de X_1, X_2, \dots, X_n é definida como a probabilidade de um retângulo n -dimensional e semi-infinito associado com o ponto (x_1, x_2, \dots, x_n) ,

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n] . \quad (\text{C.43})$$

A função densidade de probabilidade conjunta é obtida da função distribuição cumulativa conjunta (quando a derivada existe), dada por,

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad . \quad (C.44)$$

C.18 Funções de variáveis aleatórias

Seja a variável aleatória Z definida como uma função de várias variáveis aleatórias,

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad . \quad (C.45)$$

A cdf de Z é dada, encontrando o evento equivalente de $\{Z \leq z\}$, ou seja, o conjunto $R_Z = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) | g(x) \leq z\}$, então

$$F_Z(z) = P[\bar{X} \subset R_z]$$

$$F_Z(z) = \iint_{\bar{X} \subset R_z} f_{X_1, \dots, X_n}(x'_1, \dots, x'_n) dx'_1 \dots dx'_n \quad . \quad (C.46)$$

A pdf de Z é calculada tomando a derivada de $F_Z(z)$.

C.19 Correlação e covariância de funções de duas variáveis aleatórias

O momento conjunto de duas variáveis aleatórias X e Y resumem a informação sobre seu comportamento conjunto. O j -ésimo momento de X e Y é definido por,

$$E[X^j Y^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^j y^k \cdot f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad . \quad (C.47)$$

Se $j = 0$, obtemos o momento de Y , e se $k = 0$, obtemos o momento de X . Na engenharia elétrica, costuma-se chamar o momento $j = 1$ $k = 1$, $E[XY]$, de correlação de X e Y . Se $E[XY] = 0$, dizemos que X e Y são ortogonais. O j -ésimo momento central de X e Y é definido como o momento conjunto das variáveis aleatórias centralizadas, $X - E[X]$ e $Y - E[Y]$, sendo definido por,

$$E\left[\left(X - E[X]\right)^j \cdot \left(Y - E[Y]\right)^k\right] . \quad (\text{C.48})$$

Note que $j = 2$ e $k = 0$ é a variância de X , σ_X^2 , e $j = 0$ e $k = 2$ é a variância de Y , σ_Y^2 . A covariância de X e Y é definida como o momento central $j = k = 1$,

$$COV(XY) = E\left[\left(X - E[X]\right) \cdot \left(Y - E[Y]\right)\right] . \quad (\text{C.49})$$

Que pode ser expressa em termos de correlação e esperanças,

$$\begin{aligned} COV(XY) &= E\left[XY - XE[Y] - YE[X] + E[X]E[Y]\right] \Leftrightarrow \\ COV(XY) &= E\left[E[XY] - 2E[X]E[Y] + E[X]E[Y]\right] \Leftrightarrow \\ COV(XY) &= E[XY] - E[X]E[Y] . \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

O coeficiente de correlação de X e Y é definido por,

$$\rho_{X,Y} = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} . \quad (\text{C.51})$$

Em que σ_X e σ_Y são os desvios padrão de X e Y , respectivamente. As variáveis aleatórias X e Y são ditas descorrelacionadas se $\rho_{X,Y} = 0$. Assim, se X e Y são independentes, então X e Y são descorrelacionados. Para variáveis aleatórias gaussianas o inverso também é válido, ou seja, se X e Y são descorrelacionados, então X e Y são independentes.

C.20 Gaussiana conjunta de variáveis aleatórias n -dimensionais

As variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n são variáveis gaussianas conjuntas se suas pdfs conjuntas forem dadas por,

$$f_{\mathbf{X}} \equiv f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot |\Sigma|^{1/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})}. \quad (\text{C.52})$$

Em que \mathbf{X} é o vetor coluna de variáveis aleatórias e $\bar{\mathbf{X}}$ é vetor coluna da esperança amostral, dados por,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mu'_{1X_1} \\ \mu'_{1X_2} \\ \vdots \\ \mu'_{1X_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ \vdots \\ E[X_n] \end{bmatrix}. \quad (\text{C.53})$$

E Σ é a matriz de covariância, definida por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{VAR}(X_1) & \text{COV}(X_1, X_2) & \cdots & \text{COV}(X_1, X_n) \\ \text{COV}(X_2, X_1) & \text{VAR}(X_2) & \cdots & \text{COV}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{COV}(X_n, X_1) & \text{COV}(X_n, X_2) & \cdots & \text{VAR}(X_n) \end{bmatrix} \quad (\text{C.54})$$

A matriz de covariância é uma matriz simétrica, pois $\text{COV}(X_i, X_j) = \text{COV}(X_j, X_i)$.

C.21 Processos estocásticos

Os sinais eletroencefalográficos são funções aleatórias do tempo, no sentido de que variam como tempo de uma forma que não é possível prever a priori seu valor exato num determinado instante de tempo antes que efetivamente ocorram. Funções aleatórias do tempo são denominadas processos estocásticos.

Um processo estocástico é definido pelos resultados do experimento aleatório ξ , os eventos que definem o espaço amostral S e a probabilidade desses eventos. Para cada resultado $\xi \in S$, atribui-se uma função do tempo de acordo com alguma regra, tal como $X(t, \xi), t \in I$.

C.22 Distribuição das amostras

Sejam (X_1, X_2, \dots, X_n) n variáveis aleatórias obtidas por amostragem de um processo estocástico $X(t, \xi)$ nos instantes de tempo (t_1, t_2, \dots, t_n) . De forma que,

$$X_1 = X(t_1, \xi), X_2 = X(t_2, \xi), \dots, X_n = X(t_n, \xi). \quad (\text{C.55})$$

O comportamento conjunto do processo estocástico nos n instantes de tempo é especificado pela função distribuição cumulativa do vetor de variáveis aleatórias (X_1, X_2, \dots, X_n) . Então, um processo estocástico é especificado pela coleção de n -ésima ordem de cdfs:

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n]. \quad (\text{C.56})$$

Se o processo estocástico é um valor contínuo, então uma coleção de funções densidade de probabilidade pode ser definida:

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (\text{C.57})$$

C.23 Momentos de um processo estocástico

O valor esperado, $\mu'_{1X}(t)$, de um processo estocástico $X(t)$ é definido por,

$$\mu'_{1X}(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X(t)}(x) dx. \quad (\text{C.58})$$

em que $f_{X(t)}$ é a pdf de $X(t)$. A autocorrelação $R_X(t_1, t_2)$ de um processo estocástico é definida por,

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f_{X(t_1), X(t_2)}(x, y) dx dy. \quad (\text{C.59})$$

em que $f_{X(t_1), X(t_2)}$ é a pdf de segunda ordem de $X(t)$. A autocovariância $C_X(t_1, t_2)$ de um processo estocástico é definida como a covariância de $X(t_1)$ e $X(t_2)$, por,

$$C_X(t_1, t_2) = E \left[\left(X(t_1) - E[X(t_1)] \right) \cdot \left(X(t_2) - E[X(t_2)] \right) \right] . \quad (\text{C.60})$$

Da equação (C.60), a autocovariância pode ser expressa em termos de autocorrelação e médias, por,

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - \mu'_{1X}(t_1) \cdot \mu'_{1X}(t_2) . \quad (\text{C.61})$$

A variância de $X(t)$ pode ser obtida de $C_X(t_1, t_2)$, através de,

$$\text{VAR}(X(t)) = E \left[\left(X(t) - E[X(t)] \right)^2 \right] = C_X(t, t) \quad (\text{C.62})$$

O coeficiente de correlação de $X(t)$ é definido como o coeficiente de correlação de $X(t_1)$ e $X(t_2)$, dado por,

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{C_X(t_1, t_2)}{\sqrt{C_X(t_1, t_1)} \cdot \sqrt{C_X(t_2, t_2)}} \quad (\text{C.63})$$

C.24 Processo estocástico gaussiano

O processo estocástico $X(t)$ é um processo estocástico gaussiano se as amostras $X_1 = X(t_1)$, $X_2 = X(t_2)$, \dots , $X_n = X(t_n)$ são variáveis gaussianas conjuntas para qualquer n , e qualquer escolha de (t_1, t_2, \dots, t_n) . Da equação (C.52) temos que a pdf conjunta de variáveis aleatórias gaussianas é determinada pelo vetor de médias amostrais e a matriz de covariâncias,

$$f_{\mathbf{X}} \equiv f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)}(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot |\Sigma|^{1/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})} . \quad (\text{C.64})$$

Em que \mathbf{X} é o vetor coluna de variáveis aleatórias, $\bar{\mathbf{X}}$ é vetor coluna da esperança amostral e Σ é a matriz de covariância dados por,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1(t_1) \\ X_2(t_2) \\ \vdots \\ X_n(t_n) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1(t_1)] \\ E[X_2(t_2)] \\ \vdots \\ E[X_n(t_n)] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} C_X(t_1, t_1) & C_X(t_1, t_2) & \dots & C_X(t_1, t_n) \\ C_X(t_2, t_1) & C_X(t_2, t_2) & \dots & C_X(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_X(t_n, t_1) & C_X(t_n, t_2) & \dots & C_X(t_n, t_n) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.65})$$

C.25 Processo estocástico estacionário

Um sinal é considerado estacionário no sentido estrito, SSS (do inglês, *Strict Sense Stationarity*), se suas distribuições estatísticas independem do instante de tempo em que é observado. Então, as probabilidades das amostras do processo estocástico são independentes de um instante de origem, isto é, as probabilidades de amostras observadas nos instantes (t_1, t_2, \dots, t_n) não irão diferir das probabilidades de amostras observadas nos instantes $(t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau)$. Dessa forma, a função distribuição cumulativa conjunta de qualquer conjunto de amostras não dependerá do instante de origem, então

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1+\tau, X_2+\tau, \dots, X_n+\tau}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (\text{C.66})$$

A equação (C.66) é válida para quaisquer deslocamentos τ , para todo k e para qualquer escolha de instantes de observação (t_1, t_2, \dots, t_n) . A cdf de primeira ordem de um processo estocástico estacionário deve ser independente do tempo, já que pela equação (C.66),

$$F_{X(t)}(x) = F_{X(t+\tau)}(x) = F_X(x), \quad \forall t, \tau. \quad (\text{C.67})$$

Isso implica que o valor esperado e a variância de $X(t)$ são constantes e independentes do tempo,

$$\mu'_{1X}(t) = E[X(t)] = \mu, \quad \forall t \quad (\text{C.68})$$

$$\text{VAR}(X(t)) = E[(X(t) - \mu)^2] = \sigma^2, \quad \forall t. \quad (\text{C.69})$$

A cdf de segunda ordem de um processo estocástico estacionário depende somente da diferença de tempo entre as amostras, e não de um instante particular de tempo,

$$F_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) = F_{X(0), X(t_2-t_1)}(x_1, x_2), \quad \forall t_1, t_2. \quad (\text{C.70})$$

Isso implica que a autocorrelação e a autocovariância de $X(t)$ dependerão somente de $(t_2 - t_1)$,

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1), \quad \forall t_1, t_2 \quad (\text{C.71})$$

$$C_X(t_1, t_2) = C_X(t_2 - t_1), \quad \forall t_1, t_2. \quad (\text{C.72})$$

C.26 Processo estocástico estacionário no sentido amplo

No entanto, a condição de as distribuições estatísticas sejam independentes do instante de tempo em que são observadas é dificilmente encontrada na prática, e usualmente se pode determinar somente que o valor esperado é constante e a autocovariância (ou equivalentemente a autocorrelação) é uma função apenas de $(t_2 - t_1)$. Esta é uma definição mais fraca para estacionariedade e é chamada estacionariedade no sentido amplo, WSS (do inglês, *Wide Sense Stationarity*). Um processo SSS sempre será WSS, enquanto o contrário não é válido (Garcia, 1994). Portanto para que um sinal $X(t)$ seja WSS são necessárias duas condições:

- i. $\mu'_{1X}(t) = E[X(t)] = \mu, \quad \forall t;$
- ii. $C_X(t_1, t_2) = C_X(\tau), \quad \forall t_1, t_2 \text{ e } R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau), \quad \forall t_1, t_2.$

(C.73)

em que $\tau = t_2 - t_1$.

Podemos observar que se um processo estocástico gaussiano é estacionário no sentido amplo também será estacionário no sentido restrito. Isso ocorre porque a pdf de um processo estocástico gaussiano é completamente definido pela média amostral ($\bar{X} = \mu'_{1X}(t)$) e a autocovariância $C_X(t_1, t_2)$. Se $X(t)$ é WSS, então a média é constante, ($\bar{X} = \mu'_{1X}(t) = \mu$), e a autocovariância depende somente das diferenças entre os intervalos de tempo, $(t_i - t_j)$. Segue, então que a pdf de $X(t)$ depende somente dessas diferenças e, portanto é invariante em relação a deslocamentos no tempo. Portanto, o processo também é estacionário no sentido estrito, SSS.

C.27 Intervalos de confiança

A principal restrição da estimação pontual é que quando estimamos um parâmetro através de um único valor numérico toda a informação presente nos dados é resumida através deste número. É importante encontrar também um intervalo de valores plausíveis para o parâmetro. A idéia é construir um intervalo em torno da estimativa pontual de modo que ele tenha uma probabilidade conhecida de conter o verdadeiro valor do parâmetro.

O nível de confiança, c , é a probabilidade de que a estimativa intervalar contenha o parâmetro populacional em questão. Quando o tamanho amostral é superior a 30 podemos aproximar a distribuição amostral da média populacional, \bar{X} , por uma distribuição normal (pelo teorema do limite central), $N(\mu, \sigma^2)$. Para fazer inferências sobre μ nos baseamos na média amostral \bar{X} e sabemos que

$$U = \frac{\sqrt{n} \cdot (\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0,1) \quad . \quad (C.74)$$

A estatística U é uma função da amostra e também de μ , o parâmetro de interesse, mas sua distribuição de probabilidades não depende de μ . Usando uma tabela da distribuição normal padronizada podemos obter o valor do percentil $Z_{\alpha/2}$ tal que,

$$P\left[-z_{\alpha/2} \leq U \leq +z_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha \quad . \quad (C.75)$$

Assim, após isolar μ , obtemos

$$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha \quad . \quad (C.76)$$

O parâmetro μ é desconhecido, mas fixo e, portanto, não é passível de descrição probabilística, ou seja, não se trata de um intervalo de probabilidade para μ . Na verdade são os limites do intervalo que são variáveis aleatórias e após a amostra ser observada dizemos que

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{C.77})$$

Com confiança de $100 \cdot (1 - \alpha)\%$. Para construir um intervalo de confiança de 95% o valor do parâmetro $Z_{\alpha/2}$ da distribuição normal é $Z_{\alpha/2} = 1,96$.

C.28 Intervalos de confiança de uma proporção

A estimativa pontual de sucessos, \hat{p} , é dada pela proporção de sucessos em uma amostra e \hat{q} , é a proporção de fracassos. Se $n \cdot \hat{p} \geq 5$ e $n \cdot \hat{q} \geq 5$ a distribuição amostral de \hat{p} pode ser considerada normal e

$$\hat{p} = \frac{X}{n} \quad \text{e} \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} \quad (\text{C.78})$$

O erro máximo da estimativa, E , para um intervalo de confiança, $100 \cdot (1 - \alpha)\%$ é

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \quad (\text{C.79})$$

O intervalo de confiança de 95% para uma proporção será $\hat{p} - E \leq p \leq \hat{p} + E$.

C.29 Coerência entre dois sinais

A coerência entre os sinais a e b na frequência λ é uma extensão do coeficiente de correlação de Pearson, sendo definido como o quadrado do valor absoluto do espectro cruzado normalizado pelo auto-espectro:

$$|R_{ab}(\lambda)|^2 = \frac{|f_{ab}(\lambda)|^2}{f_{aa}(\lambda) \cdot f_{bb}(\lambda)} \quad (\text{C.80})$$

Nessa equação, f_{aa} , f_{bb} e f_{ab} são os valores do auto-espectro e do espectro cruzado em função da frequência λ e assume-se que são séries temporais estacionárias

com média zero. Coerência é a medida da associação linear entre dois sinais, possuindo valores de 0 a 1, onde 0 significa que não existe associação linear e 1 indica uma associação linear perfeita entre os dois.

Apêndice D: Conceitos de Álgebra

D.1 Teorema 1

Teorema: A inversa de uma matriz ortogonal é sua transposta.

O objetivo desta prova é mostrar que se \mathbf{A} é uma matriz ortogonal⁴⁶, então $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$. Sendo \mathbf{A} uma matriz $m \times n$,

$$\mathbf{A} = [\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n], \quad (\text{D.1})$$

em que \mathbf{Y}_i é o i -ésimo vetor coluna. Então, mostraremos que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{I}$. Em que \mathbf{I} é a matriz identidade. O elemento ij da matriz $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ é $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)_{ij} = \mathbf{Y}_i^T \cdot \mathbf{Y}_j$. E lembrando que as colunas de uma matriz ortonormal⁴⁷ são ortonormais entre si, em outras palavras, o produto interno de quaisquer duas colunas é zero. A única exceção é o produto interno de uma coluna particular com ela mesma, que resulta em 1. Temos que,

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)_{ij} = \mathbf{Y}_i^T \cdot \mathbf{Y}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (\text{D.2})$$

Assim, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ é a descrição exata da matriz identidade. A definição de \mathbf{A}^{-1} é $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$, no entanto como $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{I}$, segue que $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$ (Shlens, 2003).

D.2 Teorema 2

Teorema: Se \mathbf{A} é uma matriz qualquer, as matrizes $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ e $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ são ambas simétricas, isto é, a matriz é igual a sua transposta.

Examinando a transposta de cada uma e fazendo o uso da propriedade de transposição de matrizes em que $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$, obtém-se,

⁴⁶ Uma matriz ortogonal é uma matriz cuja sua inversa coincide com sua transposta, $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$.

⁴⁷ Uma matriz ortonormal é uma matriz em que suas colunas são vetores que possuem norma igual a 1, ou seja, são vetores unitários e o produto interno entre dois vetores (ou colunas) distintos é zero, ou seja, cada par de vetores é ortogonal.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)^T &= \mathbf{A}^{TT} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T \\
(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^T &= \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}^{TT} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}
\end{aligned}
\tag{D.3}$$

D.3 Teorema 3

Teorema: Uma matriz é simétrica, se e somente se, é ortogonalmente diagonalizável.

Ortogonalmente diagonalizável significa que existe uma matriz \mathbf{E} em que $\mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^T$, em que \mathbf{D} é uma matriz diagonal e \mathbf{E} é uma matriz especial que diagonaliza \mathbf{A} , de modo que,

$$\mathbf{A}^T = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^T)^T = \mathbf{E}^{TT} \cdot \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{E}^T = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^T = \mathbf{A} . \tag{D.4}$$

Evidentemente, se \mathbf{A} é ortogonalmente diagonalizável, deve ser simétrica (Shlens, 2003).

D.4 Teorema 4

Teorema: Uma matriz simétrica é diagonalizável pela matriz de seus autovetores ortonormais.

Assumindo \mathbf{A} uma matriz quadrada $n \times n$ e simétrica, com autovetores associados $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Tomando $\mathbf{E} = [e_1, e_2, \dots, e_n]$ em que a coluna i de \mathbf{E} é o autovetor e_i . Este teorema afirma que existe uma matriz diagonal \mathbf{D} em que $\mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^T$. Este teorema é uma extensão do teorema D.3 e provê uma forma para encontrar a matriz \mathbf{E} que diagonaliza a matriz simétrica \mathbf{A} .

O teorema diz que o diagonalizador especial é de fato a matriz original de autovetores. Esta prova é realizada em duas partes, na primeira parte vemos que qualquer matriz pode ser ortogonalmente diagonalizada, se e somente se, a matriz de autovetores seja totalmente linearmente independente. Na segunda parte da prova vemos que a matriz simétrica tem a propriedade especial de que todos seus autovetores, não somente são linearmente independentes, como também são ortogonais, completando a prova.

Na primeira parte da prova, assuma que \mathbf{A} seja uma matriz não necessariamente simétrica que tenha autovetores independentes. Além disso, assuma que $\mathbf{E} =$

$[e_1, e_2, \dots, e_n]$ seja a matriz dos autovetores, dispostos nas colunas. \mathbf{D} é uma matriz diagonal onde o i -ésimo autovalor está disposto na posição \mathbf{D}_{ii} . Então, mostraremos que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$. Examinando as colunas do lado esquerdo e direito da equação,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = [\mathbf{A} \cdot e_1, \mathbf{A} \cdot e_2, \dots, \mathbf{A} \cdot e_n], \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = [\lambda_1 \cdot e_1, \lambda_2 \cdot e_2, \dots, \lambda_n \cdot e_n]. \quad (\text{D.5})$$

Evidentemente se $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ então $\mathbf{A} \cdot e_i = \lambda_i \cdot e_i, \forall i$. Essa equação é a definição da equação de autovalor. Então, podemos rearranjar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ para obter $\mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^{-1}$, completando a primeira parte da prova. Na segunda parte da prova, mostramos que uma matriz simétrica sempre possui autovetores ortogonais. Para uma matriz simétrica, assuma λ_1 e λ_2 são autovalores distintos de e_1 e e_2 .

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot e_1 \cdot e_2 &= (\lambda_1 \cdot e_1)^T \cdot e_2 = (\mathbf{A} \cdot e_1)^T \cdot e_2 = e_1^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot e_2 = e_1^T \cdot \mathbf{A} \cdot e_2 \Leftrightarrow \\ e_1^T \cdot (\lambda_2 \cdot e_2) &= \lambda_1 \cdot e_1 \cdot e_2 = \lambda_2 \cdot e_1 \cdot e_2. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Pela última relação nós podemos equacionar que $(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot e_1 \cdot e_2 = 0$. Como conjecturamos que os autovalores são de fato únicos, eles devem ser neste caso, já que $e_1 \cdot e_2 = 0$. Portanto, os autovetores de uma matriz simétrica são ortogonais.

Voltando ao postulado inicial de que \mathbf{A} é uma matriz simétrica, pela segunda parte da prova, nós sabemos que os autovetores de \mathbf{A} são todos ortonormais (escolhe-se que os autovetores sejam normalizados). Isto significa que \mathbf{E} é uma matriz ortogonal e pelo teorema D.1, $\mathbf{E}^T = \mathbf{E}^{-1}$ e podemos reescrever o resultado final, como

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^T. \quad (\text{D.7})$$

Então, uma matriz simétrica é diagonalizada pela matriz de seus autovetores (Shlens, 2003). Esse resultado é apresentado de forma resumida no Teorema Espectral.

D.5 Decomposição em valores singulares

Toda matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pode ser expressa por,

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{U}_{m \times m} \cdot \mathbf{S}_{m \times n} \cdot \mathbf{V}_{n \times n}^T. \quad (\text{D.8})$$

em que, \mathbf{U} , \mathbf{S} e \mathbf{V} são dados por,

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{m \times m} &= [\Phi_1^{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T}, \Phi_2^{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T}, \dots, \Phi_m^{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T}], \quad \mathbf{V}_{n \times n} = [\Phi_1^{\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}}, \Phi_2^{\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}}, \dots, \Phi_n^{\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}}] \\ \mathbf{S}_{m \times n} &= \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{D.9}$$

Em que as colunas de $\mathbf{U}_{m \times m}$ são os valores singulares à esquerda (autovetores autonormalizados de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$), as colunas de $\mathbf{V}_{n \times n}$ são os valores singulares à direita (autovetores ortonormalizados de $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$) e $\mathbf{S}_{m \times n}$ é uma matriz diagonal com os valores singulares de \mathbf{A} , ou seja, as raízes quadradas dos autovalores não nulos de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ ou $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$.